ورودی به نظریهٔ مجموعه‌ها

ژ. بروئر

ترجمهٔ پرویز شهریاری

بـرونـر

ورودی به‌نظریهٔ مجموعه‌ها

ترجمهٔ پرویز شهریاری

ریاضیات، بیشتر یك شیوهٔ پراتیك و عمل است تا شیوهٔ یادگرفتن

براور

انتشارات پویش

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب، خیابان فخررازی کوچه انوری پلاك۱۱

○ ورودی به‌نظریهٔ‌مجموعه‌ها

○ initiation a la théorie des ensembles

○ ژ. بروئر J. Breuer

○ ترجمهٔ پرویز شهریاری

○ ناشر: انتشارات پویش تلفن ۶۶۴۱۸۵

○ چاپ اول: ۱۳۵۹، ۳۳۰۰ نسخه

○ چاپ رامین

در این کتاب

بخش یکم. مجموعه‌های متناهی

I. مفهوم مجموعه

§۱. تعریف‌ها و علامت‌ها

§۲. مجموعه‌های برابر

§۳. جزءهای یك مجموعه. مجموعه‌های مهم.

II. عمل‌های روی مجموعه‌ها

§۴. اجتماع

§۵. اشتراك

بخش دوم. مجموعه‌های نامتناهی

III. مجموعه‌های شمارا

§۱۷. توان عددهای اصلی

۱. مجموعهٔ نگاشت‌های یك مجموعه در دیگری (۸۴)، ۲. قوت مجموعهٔ زیرمجموعه‌های یك مجموعه (۸۷)، ۳. کاربرد قاعده‌های توان درمورد عددهای اصلی $n\in N$، α، γ و f (۸۸)، ۳. مجموعهٔ تابع‌های پیوسته (۹۰)، تمرین (۹۱).

بخش سوم. مجموعه‌های مرتب

VI. گونه‌های ترتیب

§۱۸. مفهوم مجموعه‌های مرتب

۱. عددهای ترتیبی، عدرهای اصلی (۹۳)، نمونه‌هائی ازمجموعه‌های‌مرتب (۹۴). رابطهٔ ترتیب، رابطهٔ پیش‌ترتیب (۹۶)، چندمثال (۹۶ و ۹۷)، تمرین (۹۸).

§۱۹. یکدیسگی، مجموعه‌های یکدیسه

۱. تعریف (۹۹)، چند مثال (۹۹)، ۲. ویژگی‌های‌رابطهٔ یکدیسگی (۱۰۰)، چند مثال (۱۰۰)، تمرین (۱۰۱).

§۲۰. عمل روی‌گونه‌های ترتیب

۱. مفهوم گونهٔ ترتیب (۱۰۲)، ۲. حاصل جمع ترتیبی درمجموعه. جمع گونه‌های ترتیب (۱۰۴)، چند مثال (۱۰۴ و۱۰۵)، ۳. حاصل ضرب قاموسی مجموعه‌ها، ضرب گونه‌های ترتیب (۱۰۵)، تمرین (۱۰۷).

VII. مجموعه‌های خوش‌ترتیب

§۲۱. مفهوم مجموعهٔ خوش‌ترتیب

۱. تعریف (۱۰۸)، تمرین (۱۰۹).

§۲۲. ویژگی‌های مجموعه‌های خوش‌ترتیب

۱. نتیجه‌هائی ازتعریف (۱۰۹)، ۲. قطعه‌های یك مجموعهٔ خوش‌ترتیب (۱۰۹)، ۳. ویژگی‌های مجموعه‌های خوش‌ترتیب (۱۱۰)، ۴. قضیه خوش‌ترتیبی یا قضیهٔ زرمه‌لو (۱۱۰)، تمرین (۱۱۲).

بخش چهارم ـ مجموعه‌های نقطه‌ها

بخش پنجم. ضمیمه‌ها

X. ادراک‌های بنیادی

XI. یادداشت تاریخی

XII. تکرار اجمالی

در سال ۱۸۷۴، کانتور (Cantor)، دربارهٔ اثر خودش، چنین نوشته بود: «هرچند به‌نظر جسارت می‌آیـد، ولی من نه‌تنها امیدوارم، بلکه کاملاً اطمینان دارم که نظریهٔ‌مجموعه‌ها، روزی کاملاً ساده و قابل قبول و طبیعی به‌نظر خواهدآمد».

درسال ۱۹۶۶، یک‌مجلهٔ هفتگی پرتیراژ با حروف درشت نوشت: «تروریسم نظریهٔ مجموعه‌ها».

آقای پروفسور بروئر (Breuer)، در راه تحقق پیشگوئی کانتور، گام برداشته و اثری ساده و درعین‌حال کامل، به‌منظور ایجاد اعتماد در دانش‌آموزان و پدر و مادرهای آنها، نوشته است. این اثر، حتی به‌آنهایی‌که‌آگاهی‌های بیشتری در این زمینه دارند، دید تازه‌ای نسبت به‌کل این نظریه ـ کـه گاه مفهوم‌های دشواری را در خود جـا داده است ـ می‌دهد. موفقیت آقای بروئر در این است که از روشی طبیعی ومتکی بر اصول سادهٔ تعلیم و تربیت، استفاده‌کرده است. او برای توضیح هر مفهومی، با ذکر مثال‌های مناسب، کاربرد آن را شرح می‌دهد و ضمناً تشریح می‌کندکه چرا مفهوم‌های قبلی برای توضیح همان اندیشه، کافی نبوده‌اند.

دراین‌کتاب نشان داده می‌شود کـه ریاضیات، و حتی مجردترین مفهوم‌های‌آن، هرگز چیزی جز پاسخ‌به‌پرسش‌هایی که به‌خوبی فرموله شده‌اند، نیست. آیا تعداد عددهای درست، بیشتر از تعداد عددهای اول است؟ درنظر اول، پرسشی‌بچه‌گانه است و به‌درد طرح، برای‌کسانی‌که هنوز درابتدای ریاضیات گام برمی‌دارند، می‌خورد. ولـی کانتور، برای پاسخ به این پرسش، ناچار بود ازمفهوم عددهای اصلی ترانسفینی‌استفاده کند...

بخش یکم

مجموعه‌های متناهی

I. مفهوم مجموعه

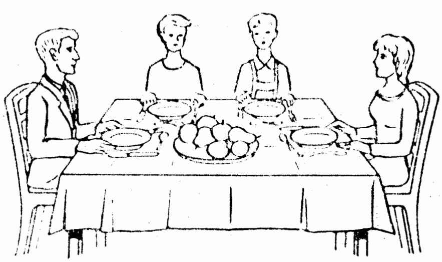
§ ۱. تعریف‌ها و علامت‌ها

۱. تعریف

مجموعه‌چیست؟ مجموعه، آن‌طور که‌از بیان عادی این‌واژه مستفاد می‌شود، یك کمیت نامشخص ازافراد، وسیله‌های نقلیه یا اشیاء نیست، بلکه به‌قول ژرژکانتور (۱۸۴۵ـ۱۹۱۸):

مجموعه عبارتست از اجتماع یك کلکسیون شیء در یك‌کل، به‌نحوی که حس ما یا ادراك ما، توانائی تمیز وتشخیص آنها را داشته باشد. هرکدام از این اشیاء، یك عضو از مجموعه می‌باشند.

۲. چند مثال



شکل ۱. چند مجموعه

الف) درشکل ۱، ۴ نفر دور یك میز نشسته‌اند و تشکیل یك مجموعهٔ چهار نفری را داده‌اند. در واقع، می‌توانیم ۴ چیز متمایز وکاملاً مشخص‌را روی

شکل ببینیم که عبارتند از خانم وآقای W و پسرهای آنها فردریك و پیر. در اینجا، با یك مجموعهٔ ۴ عضوی سر و کار داریم. ۴ قاشق، ۴ چنگال، ۴ کارد و ۴ بشقاب نیز، هر کدام یك مجموعهٔ ۴ عضوی را تشکیل می‌دهند.

همچنین می‌توانیم جمیع لوازم غذاخوری را مانند یك مجموعهٔ ۱۲ عضوی درنظر بگیریم. هر کدام از این اشیاء را مانند یك عضو مجموعهٔ C مشخص می‌سازیم. در ظرفی که روی میز گذاشته شده است، مجموعه‌ای از ۷ میوه وجود دارد. همچنین‌می‌توانیم بگوییم که این‌ظرف شامل‌مجموعه‌ای از ۴ سیب و مجموعه‌ای از ۳ گلابی است.

اینکه‌عضوهای‌موردنظر یك‌مجموعه‌دارای ویژگی‌های کاملاً مشخصی باشند، کاملا مهم است. باید دقیقاً بتوانیم نظر بدهیم که هرشیء عضوی از مجموعه است یا نه.

مجموعهٔ عضوهای خانوادهٔ W ازجنس مذکر، شامل عضوهای زیر است: آقای W، فردریك و پیر. مجموعهٔ اشخاص جنس مؤنث، شامل تنها یك عضو است: خانم W.

پس یك مجموعه، به‌معنای ریاضی کلمه، ممکن‌است دارای تعدادکمی عضو و حتی شامل تنها یك عضو باشد.

به‌خاطر این‌که بتوانیم قانون‌های موردنظر را تعمیم دهیم و به‌صورت کلی بیان‌کنیم، لازم است‌که مجموعهٔ تهی را هم تعریف‌کنیم:

مجموعهٔ تهی شامل هیچ عضوی نیست.

مثلا، مجموعهٔ گوجه‌های موجود در ظرف روی میز شکل ۱، یك مجموعهٔ تهی است.

ب) اگر کلاس‌پنجم‌دبیرستان‌شامل ۱۵ دانش‌آموز باشد، این‌دانش‌آموزان، ۱۵ عضو ازمجموعهٔ دانش‌آموزان‌کلاس پنجم دبیرستان را تشکیل‌می‌دهند. ویژگی مشخص‌کنندهٔ این مجموعه عبارتست از این‌که: هرکدام از عضوها، یك دانش‌آموز‌کلاس پنجم دبیرستان می‌باشد.

فرض‌کنیم‌درکلاس، ۱۵ جا برای نشستن باشد. اگر این ۱۵ دانش‌آموز

می‌خواستند این جاها را درتمام حالت‌هایی که ممکن‌است، اشغال‌کنند، طبق قانون‌های آنالیز ترکیبی[1]، ۰۰۰ ۳۶۸ ۶۷۴ ۳۰۷ ۱ =!۱۵ وضع ممکن وجود می‌داشت. مجموعهٔ حالت‌های ممکن، شامل متجاوز از ۱۳۰۰میلیارد عضومی‌شد (۱۳۰۰ میلیارد ثانیه، مدت زمانی بیشتراز ۴۰۰۰۰ سال است).

در مثال‌هایی‌که تا اینجا آوردیم، اشیاء مقید را در یك‌کل، که مجموعه باشد،گردآوردیم. در ریاضی، غالباً اشیائی‌راکه با ادراك خود درك می‌کنیم، درنظر می‌گیریم. این‌اشیاءِ مجرد، مثلا عبارتند ازعددها، زوج‌عددها، نقطه‌ها، خط‌ها، مثلث‌ها وغیره.

۳. مجموعهٔ عددها و زوج عددها

الف) مجموعـهٔ همهٔ عددهای درست طبیعی یك رقمـی، شـامل عضوهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ است. اینها ۹ شیءِ کاملاً معین و مشخص متعلق به‌مجموعـهٔ E هستند، زیرا دقیقاً دارای ویژگـی «عدد درست طبیعی یك رقمی بودن» هستند.

ب) مجموعهٔ T کوچکترین سه‌عدد درست طبیعی، شامل‌عضوهای ۱، ۲، ۳ است.

پ) مجموعـهٔ N ، عددهـای درست طبیعی، شـامل عضوهـای ۱، ۲، ۳، ۴، ... می‌باشد.

ت) مجموعهٔ P، عددهای زوج، شامل عضوهای ۲، ۴، ۶، ۸، ... است.

ث) مجموعهٔ U عددهای اول، شامل عضوهای ۲، ۳، ۵، ۷، ... می‌باشد.

---

۱. تعداد جایگشت‌های n عضو مختلف برابر !n (فاکتوریل n) است.

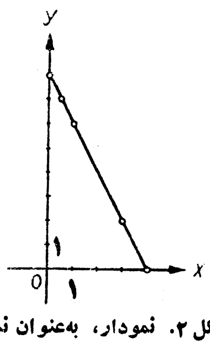
$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$$

ج) مجموعهٔ C، زوج‌های مرتب عضوهای T، شامل عضوهای (۱و۱)، (۲و۱)،(۳و۱)،(۱و۲)،(۲و۲)،(۳و۲)،(۱و۳)،(۲و۳)، (۳و۳) است.

چ) دومجموعه‌از عددها،که بایك رابطهٔ تابعی‌به‌هم مربوط‌باشند، خود یك مجموعهٔ زوج‌ها را به‌وجود می‌آورد (§ ۵.۷ را ببینید). مثلاً تابع $y=2x$ برپایهٔ مجموعه‌های N (مجموعهٔ حوزهٔ تعریف متغیر x) وP (مجموعهٔ‌حوزهٔ تعریف متغیر y)، مجموعهٔ زوج‌های (x،y) را تولید می‌کندکه شامل عضوهای (۲و۱)، (۴و۲)،(۶و۳)،... می‌باشد.

ح) اگر xوy را، مثل مختصات دکارتی درنظر بگیریم، می‌توان تابع را با یك نمودار نمایش داد (نمایش نموداری تابع، خم‌نمایش). مجموعهٔ زوج‌ها،که محض سادگی به‌شکل جدول نمایش داده می‌شود، می‌تواند برای رسم نمودار تابع به‌کارگرفته شود.

مثال. اگر x و y عددهای حقیقی مثبت باشند، تابع $y=8-2x$، یك مجموعهٔ زوج‌های H را تولید می‌کندکه ضمناً شامل‌عضوهای (۰و۴)، (۲و۳) ، (۶و۱) ، $(\frac{1}{2}$و۷$)$ و غیره می‌باشد. از این‌مجموعهٔ زوج‌ها،که به شکل جدول نشان داده شده است، نمودار شکل ۲، نتیجه می‌شود.



شکل ۲. نمودار، به‌عنوان نمایش یك مجموعهٔ زوج‌ها

x	۴	۳	۱	$\frac{1}{2}$	...
y	۰	۲	۶	۷	...

خ) معادلهٔ $4x-8=0$ دارای جواب $x=2$ است (تساوی به‌ازای $x=2$ برقرار است). مجموعهٔ{۲} را مجموعهٔ‌جواب S_1،

از معادلهٔ $4x - 8 = 0$ گویند.

د) مجموعهٔ شامل عددهای ۲ و ۳، عبارتست ازمجموعهٔ جواب S_2، از معادلهٔ $x^2 - 5x + 6 = 0$.

ذ) مجموعهٔ جواب S_3 معادلهٔ $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$، شامل عضوهای ۱، ۲، ۳ است.

ر) مجموعـهٔ جواب S_4، در نامعادلـهٔ $\frac{x+4}{x+7} < \frac{x+1}{x+3}$، که در آن x یك عدد طبیعی است، شامل عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ است.

راهنمایی برای حل نامعادله. اگر x یك عدد طبیعی باشد، مقدارهای $x+3$ و $x+7$ مثبت هستند ومی‌توان دوطرف نامعادله را درعامل‌های $(x+3)$ و $(x+7)$ ضرب کرد (بدون‌عوض کردن‌جهت نامعادله). درنتیجه به‌دست می‌آید:

$$x^2 + 8x + 7 < x^2 + 7x + 12$$

و از آنجا خواهیم داشت: $x < 5$.

ز) مجموعهٔ‌جواب S_5، عددهای‌حقیقی که درنامعادلهٔ $7 < \frac{3x+1}{x-5}$ صدق می‌کنند، کدام است؟

راهنمایی. α) به‌ازای $x - 5 > 0$، یعنی وقتی‌که $x > 5$ باشد، داریم:
$3x + 1 < 7x - 35$ یا $-4x < -36$ یا $x > 9$.

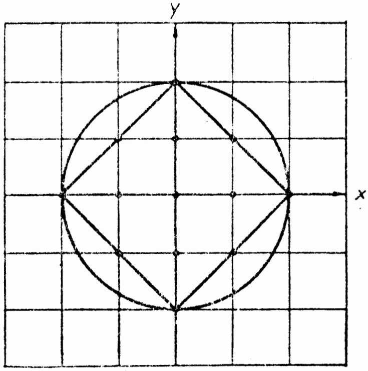
β) به‌ازای $x < 5$ داریم: $3x + 1 > 7x - 35$ یا $-4x > -36$ یا $x < 9$.

از $x < 5$ و $x < 9$، نابرابری $x < 5$ را نگه می‌داریم.

پس، مجموعهٔ S_5، شامل همهٔ عددهای حقیقی x است که در $x < 5$ یا $9 < x$ صدق کنند.

۴. چند مثال از هندسه

الف) مجموعهٔ E_1، نقطه‌های به‌مختصات درست واقع در درون ومحیط مربعی که رأس‌های آن به‌مختصات $(2,0)$، $(0,2)$، $(-2,0)$، $(0,-2)$ باشد، شامل ۱۳ نقطه است (شکل ۳ را ببینید).



شکل ۳. مجموعه‌هایی از نقطه‌های به‌مختصات درست

ب) مجموعهٔ E_2 نقطه‌های به‌مختصات درست درون دایرهٔ به‌معادلهٔ $x^2+y^2=4$، شامل ۹ نقطه است.

پ) مجموعهٔ D_1، خط‌های گذرنده بر مبداء مختصات، شامل همهٔ خط‌های به‌معادلهٔ $y=mx$ است. m، یك عدد حقیقی دلخواه است.

ت) مجموعهٔ D_2، خط‌های گذرنده برمبداء مختصات ونقطهٔ $P_1(1,1)$، شامل تنها یك خط است: خط به‌معادلهٔ $y=x$.

ث) مجموعهٔ D_3، خط‌های گذرنده برمبداء مختصات و نقطه‌های $P_1(1,1)$ و $P_2(2,3)$، یك مجموعهٔ تهی است.

۵. علامت‌ها

الف) مجموعه‌ها، به‌طورکلی با حرف‌های بزرگ نمایش داده می‌شوند. عضوهای یك‌مجموعه‌را، معمولاً بین دو ابرو {} نشان‌می‌دهند. ردیف این‌عضوها، هیچ نقش‌خاصی‌را، دست‌کم به‌فوریت، بازی‌نمی‌کند (البته با مجموعه‌های مرتب دربخش سوم‌آشنا خواهیم شد).

مجموعه‌های داده شده در مثال‌ها به طرز زیر علامت‌گذاری می‌شوند:

$$E=\{۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹\}$$
$$T=\{۱،۲،۳\}$$
$$N=\{۱،۲،۳،۴،۵،...\}$$
$$P=\{۲،۴،۶،۸،۱۰،...\}$$
$$U=\{۲،۳،۵،۷،...\}$$
$$C=\{(۱،۱)،(۱،۲)،(۱،۳)،(۲،۱)، ...، (۳،۳)\}$$
$$H=\{(x،y)|y=۸-۲x;x،y\geqslant ۰\}$$
$$S_۱=\{x|۴x-۸=۰\}=\{۲\}$$
$$S_۲=\{x|x^۲-۵x+۶=۰\}=\{۲،۳\}$$
$$S_۳=\{x|x^۳-۶x^۲+۱۱x-۶=۰\}=\{۱،۲،۳\}$$

مجموعهٔ تهی شامل هیچ عضوی نیست و با نماد $\varnothing$ نمایش داده می‌شود.

ب) گزاره‌های «۵ عضوی از E است» و «۵ عضوی از T نیست» را با علامت‌های $۵\in E$ و $۵\notin T$ نشان می‌دهند.

علامت $\in$ به‌معنای «عضوی از ... است» و $\notin$ به معنای «عضوی از ... نیست» می‌باشد (جدول نمادها را ببینید).

دربعضی‌حالت‌ها $E\ni ۵$ نیزمی‌نویسندکه خوانده می‌شود «E شامل ۵ است» و $T\not\ni ۵$ که به‌معنای «T شامل ۵ نیست» است.

گزاره‌های «۵ عضو E است» و «E شامل ۵ است»، هم‌ارزهستند.

هم‌ارزی منطقی با علامت $\Longleftrightarrow$ نشان داده می‌شود، مثلاً:

$$۵\in E\Longleftrightarrow E\ni ۵$$
$$۵\notin T\Longleftrightarrow T\not\ni ۵$$

۶. کاهش عضوهای یك مجموعه

بنابر تعریفی که کانتور از یك مجموعه داده است، باید عضوهای یك مجموعه، کاملا متمایز باشند. مثلاً عددهای ۱، ۲، ۵، ۷، ۲، ۳، تنها بعد از آنکه یکی از ۲ ها را حذف کنیم، به‌صورت مجموعه درمی‌آید. در این صورت، مجموعه چنین می‌شود: {۱، ۲، ۳، ۵، ۷}. به‌همین ترتیب، عددهای ۱، $\sqrt{۴}$، ...، $\frac{۲}{۲}$، ۲، چیزهای متمایزی نیستند. ۱ و $\frac{۲}{۲}$ دو نماد مختلف از یك چیز و $\sqrt{۴}$ و ۲ هم دونماد از یك چیز هستند.

۷. مجموعه‌های متناهی و مجموعه‌های نامتناهی

از هم‌اکنون می‌توانیم مجموعه‌هایی را که در مثال‌ها دیده‌ایم، به‌دوگونهٔ متمایزتقسیم کنیم. مجموعه‌های E، T، C، $S_۱$، $S_۲$، $S_۳$، $S_۴$، $E_۱$، $E_۲$ و $D_۲$، مجموعه‌هایی متناهی هستند. تعداد عضوهای هرکدام از این مجموعه‌ها، عددی محدود و معین و به‌ترتیب، برابر است با: ۹، ۳، ۹، ۱، ۲، ۳، ۴، ۱۳ و ۹. مجموعه‌های N، P، U، H، $D_۱$ و $S_۴$، برعکس، هرکدام شامل بی‌نهایت عضو می‌باشند. تعداد عضوهای آنها، ازهرعددی که درنظر بگیریم - هرقدرکه بزرگ باشد - بیشتر است.

در بخش اول این کتاب، به بررسی مجموعه‌های متناهی اکتفا می‌کنیم و سعی می‌کنیم با مفهوم‌ها و نمادهای اساسی آشنا شویم. در § ۳.۸، دوباره به بررسی اختلاف بین مجموعه‌های متناهی ونامتناهی برخواهیم گشت.

تمرین

۱. در اطراف خود «اشیائی» بیداکنیدکه قابل گروه‌بندی مجموعه‌ای باشند: پنجره، میز، کتاب، ...

۲. آیا عددهای ۱، $\frac{۱}{۴}$، π و ۰/۲۵، یك مجموعهٔ چهار عضوی تشکیل می‌دهند؟

۳. آیا مجموعهٔ نقطه‌های به مختصات درست از سطح بین دو دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱۲$ و $x^۲+y^۲=۱۴$، یك مجموعهٔ تهی است (طرحی رسم کنید).

۴. مجموعهٔ همهٔ کسرهای تحویل‌ناپذیر کمتر از واحد را، که صورت و مخرج آنها، عددهای درست یك‌رقمی باشند، بسازید (کسری را تحویل ناپذیر گویند که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك صورت و مخرج آن برابر واحد باشد).

۵. مجموعهٔ کسرهای تحویل‌ناپذیر بزرگتر از واحد، که صورت و مخرج آنها عددهای درست یك رقمی هستند، دارای هشت عضو کمتر از مجموعهٔ تمرین ۴ است. چرا؟

۶. مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۸x+۷=۰$ را تشکیل دهید.

۷. مجموعهٔ عددهایی را که درمعادلهٔ $x^۳+x^۲-۱۱۰x=۰$ صدق می‌کند، تعیین کنید.

۸. مجموعهٔ عددهای حقیقی صادق در معادلهٔ $x^۴+۳x^۲+۲=۰$ کدام است ؟

۹. مجموعهٔ نقطه‌های به‌مختصات درست واقع بر روی هذلولی $y=\frac{۱}{۲x}$ را تعیین کنید.

۱۰. تعداد عضوهای مجموعهٔ نقطه‌های با مختصات درست فضا را، که روی سطح کروی $x^۲+y^۲+z^۲=۱۶۹$ واقع‌اند، معلوم کنید.

۱۱. مجموعهٔ عددهای طبیعی صادق درنابرابری $\frac{x+۲}{x+۵}>\frac{x+۱}{x+۳}$ را معین کنید.

۱۲. مجموعهٔ عددهای حقیقی صادق در نابرابری $۶>\frac{x+۷}{x-۳}$ را پیدا کنید.

§۲. مجموعه‌های برابر

۱. تعریف

مجموعه‌های T و $S_۳$ مثال‌های پیش، شامل عضوهای ۱، ۲ و ۳ هستند. همینطور مجموعه‌های:

$$F=\{log ۱۰۰، sin ۹۰^\circ، E(\pi)\} \quad \text{و} \quad E=\left\{\frac{۱۲}{۴}، \frac{۳}{۳}، ۲\right\}$$

شامل همان عضوهای ۱ و ۲ و ۳ هستند، زیرا عبارت‌های $\frac{۱۲}{۴}$ و $E(\pi)$[1]، معرف همان عدد ۳ هستند. همچنین عبارت $log ۱۰۰$ معرف عدد ۲ و عبارت‌های $sin ۹۰^\circ$ و $\frac{۳}{۳}$، معرف عدد ۱ هستند. به‌این‌ترتیب، عضوهای مجموعه‌های T، $S_۳$، E و F، فرقی با هم ندارند. ترتیب این‌عضوها هم، نقشی در معرفی مجموعه ندارند. می‌گویندکه مجموعه‌های T، $S_۳$، E و F برابرند ومی‌نویسند:

$$T=S_۳=E=F$$

دومجموعه وقتی برابرند که دقیقاً دارای یك‌نوع عضو باشند، یعنی هم تعداد و هم‌نوع عضوها، در آنها یکی باشد.

۲. ویژگی‌های رابطهٔ برابری

از تعریف می‌توان نتیجه گرفت که در مجموعه‌های برابر، این خاصیت‌ها وجود دارد:

---

۱. $E(x)$ به‌معنای بزرگترین عدد کوچکتر یا برابر عدد x است. مثلاً $E(\pi)=۳$، $E(۱/۷۵)=۱$، $E(-۲/۳)=-۳$.

الف) خاصیت بازتابی: $E=E$.

ب) خاصیت تقارنی: $E=F\Rightarrow F=E$.

پ) خاصیت سرایت‌پذیری: $E=F$ و $F=G\Rightarrow E=G$.

نشانهٔ $\Rightarrow$ به این معناست: «ازآنجا نتیجه می‌شود» یا «اگر ... آنگاه».

۳. گزاره‌های هم‌ارز

اگر به‌ازای هرعضو x، $x\in E$ موجب $x\in F$ وبرعکس $x\in F$ موجب $x\in E$ بشود، درآن‌صورت $E=F$.

به‌طور ساده می‌توان نوشت:

$$(x\in E\Longleftrightarrow x\in F)\Longleftrightarrow E=F$$

تمرین

۱. از مجموعه‌های زیر، کدام‌ها برابرند[1]؟

$$E_۱=\left\{\frac{۴}{۲},\ln e\right\},\ E_۲=\{۱,۲\},$$

$$E_۳=\left\{E(e),\ tg\,\frac{\pi}{۴}\right\},\ E_۴=\{x|x^۲-۳x+۲=۰\}$$

۲. آیا این گزاره درست است[2]؟

$$(x\in E\Rightarrow x\in F)\wedge(x\in F\Rightarrow x\in E)\Longleftrightarrow E=F$$

۳. آیا مجموعه‌های $E_۱$ و $E_۲$ در شکل ۳ برابرند؟

۴. آیا این مجموعه‌ها، با کنار گذاشتن نقطه‌های واقع بر محیط دایره و

---

۱. $\ln x$ نمایشگر لگاریتم‌نپری x و $e=۲/۷۱۸۲۸...$، پایهٔ لگاریتم‌های نپری است.

۲. علامت $\wedge$ ، از منطق گرفته شده است و به‌معنای «و» است.

مربع، باز هم برابر باقی می‌مانند؟

۵. آیا مجموعهٔ خطهای فضا، برابر مجموعهٔ نقطه‌های آن است؟

۶. آیا گزارهٔ $a+b=c \Leftrightarrow b=c-a$ به‌ازای عددهای حقیقی درست است؟

۷. آیا رابطه‌های $<$ (اکیداً کوچکتر) و $>$ (اکیداً بزرگتر)، الف) بازتاب، ب) متقارن، پ) سرایت‌پذیر هستند؟

۸. آیا گزارهٔ $a.b=c \Leftrightarrow b=\frac{c}{a}$، که درآن a،b وc عددهای حقیقی و $a\neq 0$ باشد درست است؟

۹. آیا گزارهٔ $(3\in E_1) \wedge (3\in E_2) \Leftrightarrow E_1=E_2$ درست است؟

۱۰. آیا گزارهٔ $S=\{x|ax=0 \wedge a\neq 0\}=\varnothing$ درست است؟

§۳. جزء های یك مجموعه. مجموعه‌های مهم

۱. جزءهای یك مجموعه

مجموعهٔ F، یك جزء یا یك زیر مجموعه از یك مجموعهٔ E است، به‌شرطی که هر عضو F، عضوی از E نیز باشد.

می‌نویسند $F\subseteq E$، اگر $x\in F \Rightarrow x\in E$، یا

$$F\subseteq E \Leftrightarrow (x\in F \Rightarrow x\in E)$$

همان گزاره را اینطور هم می‌نویسند $E\supseteq F$ و خوانده می‌شود «E شامل F است».

نشانهٔ $F\subset E$ خوانده می‌شود «F اکیداً مشمول E است» یا «F زیر مجموعهٔ محض E است». این به‌معنای آنست که هر عضو F یك

عضو E نیز هست، ولی دست‌کم یك عضو E وجود دارد که عضوی از F نیست

به‌یاری این تعریف‌ها می‌توانیم بگوییم:

هر مجموعه، زیرمجموعه‌ای از خودش است، و

مجموعهٔ تهی، زیر مجموعه‌ای از هر مجموعه است.

گزارهٔ اخیر را به‌عنوان تعریف گزارهٔ تهی هم به‌کار برد.

۲. مجموعه‌های متمم

اگر F زیر مجموعه‌ای محض از E باشد، مجموعهٔ متمم F (نسبت به E)، عبارتست از مجموعهٔ عضوهایی از E، که به F تعلق ندارند.

متمم F نسبت به E را با نشانهٔ C_EF یا CF (اگر اشتباهی رخ ندهد)، مشخص‌می‌کنند. همچنین می‌توان ازنشانهٔ «تفاضل» نیز استفاده کرد: $E-F$.

۳. چند مثال

الف) زیر مجموعه‌های مجموعهٔ $E=\{۱،۲،۳\}$ را تشکیل‌می‌دهیم.

مجموعهٔ تهی، یك زیر مجموعه از هر مجموعه و از آن جمله، مجموعهٔ E است.

زیر مجموعه‌هائی از E که دارای یك عضو باشند، عبارتند از:

$E_{۱۱}=\{۱\}$، $E_{۱۲}=\{۲\}$، $E_{۱۳}=\{۳\}$.

زیر مجموعه‌هائی از E که شامل دو عضوند: $E_{۲۱}=\{۱،۲\}$، $E_{۲۲}=\{۱،۳\}$، $E_{۲۳}=\{۲،۳\}$.

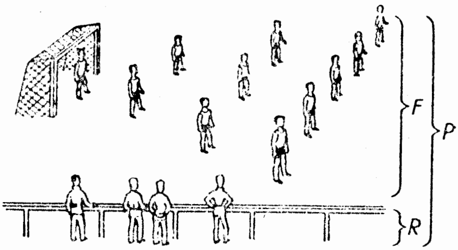
زیر مجموعه‌هائی از E که شامل سه عضوند، تنها عبارتست ازخود E: $E_۳=\{۱،۲،۳\}$

مجموعه $E=\{۱،۲،۳\}$، دارای $۸=۲^۳$ زیر مجموعه است.

از روی قانون‌های سادهٔ آنالیز ترکیبی[1]، می‌توانیم به‌طـور کلی بگوییم:

هر مجموعهٔ n عضوی دارای ۲^n زیر مجموعه است.

ب) از مجموعهٔ ۱۵ نفری F، دانش آمـوزان سال پنجم دبیرستان، یك مجموعهٔ ۱۱ نفری بـازی‌کنان یك تیم فـوتبال را در می‌آوریم (شکـل ۴). مجموعهٔ P بـازی‌کنان، جزئی (زیر مجموعه‌ای) از مجموعهٔ P دانش آمـوزان سال پنجم دبیرستان است. ولیP، شامل عضوهایی نیز هست که‌عضو F نمی‌باشند. پسF زیرمجموعهٔ محض P است. مجموعهٔR، که‌شامل بقیهٔ دانش‌آمـوزان است، یعنی $R=P-F$، شامل



شکل ۴. مجموعه، زیر مجموعه، مجموعهٔ متمم.

۴ دانش‌آموز سال پنجم دبیرستان است که فوتبال بازی نمی‌کنند. مجموعهٔ R نیز زیر مجموعهٔ محض P است.

مجموعهٔ این گزاره‌ها را می‌توان به‌طور خلاصه، چنین نوشت:

$$F\subset P \text{ ، } R\subset P \text{ ، } R=P-F$$

تیمی که به‌این ترتیب تشکیل شده است، !۱۱ امکان افراز، یعنی ۳۹۹۱۶۰۰۰=!۱۱ جـایگشت ممکن در روی زمین را دارد. ولـی ما

---

۱. در آنالیز ترکیبی ثابت می‌کنند که تعداد ترکیب‌های ممکن n شیء که p به p اختیار شود، یعنی تعداد امکان‌های استخراج p شیء از یك مجموعهٔ شامل n شیء، برابر است با $C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$. پس برای مجموعه‌ای که دارای n عضو است، می‌توان به‌اندازهٔ C_n^0 زیر مجموعهٔ تهی، C_n^1 زیـر مجموعـهٔ یك عضوی و... به‌دست آورد. درنتیجه تعداد کل زیر مجموعه‌ها چنین می‌شود:

$$C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=۲^n$$

می‌دانیم که درکل به‌اندازهٔ $\text{۱۳۶۵} = \frac{\text{۱۵}!}{\text{۱۱}! \times \text{۴}!} = C_{\text{۱۵}}^{\text{۱۱}}$ امکان برای انتخاب تیم ۱۱ نفری، از یك کلاس ۱۵ نفری وجود دارد. بنابراین روی هم به‌اندازهٔ $\text{۵۴۴۸۶۴۳۲۰۰۰} = \text{۱۱}! \times C_{\text{۲۵}}^{\text{۱۱}}$ ترکیب، ممکن است.

پ) مجموعهٔ $E = \{a, b, c, d, e\}$، شامل زیر مجموعه‌های محض زیر است:

$$S_{\text{۰}} = \varnothing, \ S_{\text{۱۱}} = \{a\}, S_{\text{۱۲}} = \{b\}, \ldots, S_{\text{۱۵}} = \{e\},$$
$$S_{\text{۲۱}} = = \{a, b\}, \ldots, S_{\text{۳۱}} = \{a, b, c\}, \ldots, S_{\text{۴۴}} = \{b, c, d, e\}$$

و نیز شامل $S_{\text{۵}} = \{a, b, c, d, e\}$ است.

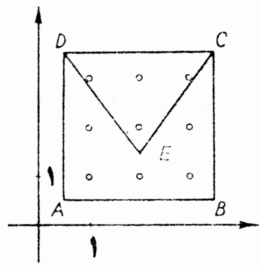
همهٔ این زیر مجموعه‌ها، خود یك مجموعه تشکیل می‌دهند که آن را با $\mathscr{P}(E)$ نشان می‌دهند. $\mathscr{P}(E)$ دارای $\text{۲}^{\text{۵}} = \text{۳۲}$ عضو است.

ت) مجموعهٔ $C_{\text{۱}}$ نقطه‌های به‌مختصات درست از مربع ABCD (شکل ۵)، شامل مجموعهٔ $C_{\text{۲}}$ نقطه‌های به‌مختصات درست مثلث CDE و مجموعهٔ $C_{\text{۳}}$ نقطه‌های به‌مختصات درست پنج ضلعی ABCDE است. یعنی

$$C_{\text{۲}} \subset C_{\text{۱}} \ , \ C_{\text{۳}} \subset C_{\text{۱}}$$

$C_{\text{۲}}$ متمم $C_{\text{۳}}$ نسبت به $C_{\text{۱}}$ است، یعنی

$$C_{\text{۳}} = C_{\text{۱}} - C_{\text{۲}} \text{ یا } C_{\text{۲}} = C_{\text{۱}} - C_{\text{۳}}$$



شکل ۵. مجموعهٔ نقطه‌های با مختصات درست.

تمرین

۱. زیر مجموعه‌های مجموعهٔ $E = \{\text{۲}, \text{۳}, \text{۵}, \text{۷}\}$ را بنویسید.

۲. از یك کلاس ۱۰ نفری، چند تیم والیبال (زیر مجموعه‌های شش‌نفری) می‌توان درست کرد؟

۳. مجموعهٔ پذیرفته شدگان امتحان نهائی باید زیر مجموعه یا زیر مجموعهٔ محض، از مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس نهائی باشند؟

۴. آیا این گزاره درست است؟

$$(F \subseteq E) \wedge (E \subseteq F) \Longleftrightarrow E = F$$

۵. اگر داشته باشیم:

$$E = \left\{tg\frac{\pi}{۳}, ۱, sin\frac{\pi}{۶}\right\}, F = \left\{E(log ۱۲), \frac{۱}{۲}, \sqrt{۳}\right\}$$

مطلوبست تعیین $E - F$.

۶. مجموعه‌ای پیدا کنید که هر کدام از مجموعه‌های زیر، زیر مجموعه‌ای از آن باشد:

$$S_۱ = \{a, b, c, d, e\}, S_۲ = \{a, c\},$$
$$S_۳ = \{b, c, d\}, S_۴ = \varnothing, S_۵ = \{a, c, e\}.$$

۷. هر کدام از مجموعه‌های زیر شامل چند عضو هستند:

الف) مجموعهٔ $C_۱$، نقطه‌های به‌مختصات درست‌از دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۷$،

ب) مجموعهٔ $C_۲$، نقطه‌های به‌مختصات درست از مربع به‌رأسهای با مختصات$(۰, \pm\sqrt{۷})$ و $(\pm\sqrt{۷}, ۰)$.

پ) آیا یکی از این مجموعه‌ها، زیر مجموعهٔ دیگری است؟

ت) مجموعهٔ متمم $C_۲$، نسبت به $C_۱$، کدام است؟

ث) شکل را رسم کنید.

II. عمل‌های روی مجموعه‌ها

§۴. اجتماع

۱. تعریف

اجتماع دو مجموعه عبارتست از مجموعهٔ همهٔ عضوهایی که دست‌کم متعلق به‌یکی از این مجموعه‌ها باشد.

اجتماع دو مجموعهٔ E و F را به‌صورت $E \bigcup F$ نشان می‌دهند و می‌خوانند: «E نا و F». مجموعهٔ اجتماع، شامل عضوهای خاص E و

عضوهای خاص F و همچنین عضوهای مشترك در E و F است. البته، عضوهای اخیر را تنها یك‌بار به‌حساب می‌آورند. مثلاً

$$E=\{۱،۲،۳،۴\}،\ F=\{۱،۲،۵\}،\ E\bigcup F=\{۱،۲،۳،۴،۵\}.$$

۲. ویژگی‌های اجتماع

الف) جا به‌جایی: $E\bigcup F=F\bigcup E$

ب) شرکت پذیری: $(E\bigcup F)\bigcup G=E\bigcup(F\bigcup G).$

۳. مثال

$E=\{۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹\}$، مجموعهٔ عددهای یك رقمی؛ P، مجموعهٔ عددهای‌زوج یك رقمی؛ I، مجموعهٔ عددهای‌فرد یك رقمی؛ U، مجموعهٔ عددهای اول یك رقمی است.

الف) $I\subset E$، $U\subset E$، $P\subset E$

ب) $P\bigcup I=E$، $I\bigcup E=E$، $P\bigcup E=E$

$P\bigcup U=\{۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸\}$، $U\bigcup I\bigcup P=E$.

پ) $E-U=\{۱،۴،۶،۸،۹\}$، $E-I=P$، $E-P=I$

P و U دارای عضوهای مشترك نیستند و آنها را، مجموعه‌های جدا از هم گویند.

اگر E و F را دو مجموعهٔ جدا از هم بگیریم، داریم:

$$E\bigcup F=\{x|x\in E \vee x\in F\}$$

که خوانده می‌شود: مجموعهٔ اجتماع، شامل عضوهای متعلق به E یا F است.

علامت $\vee$ از منطق ریاضی گرفته شده است و در اینجا به‌معنای «یا»ی فصلی است (یا این یا آن، ولی نه هر دو). درجای دیگر، علامت $\vee$ می‌تواند به‌معنای «یا»ی عطفی باشد (این یا آن یا هر دو). به‌معنای اخیر، مجموعه‌های E و F، چه جدا از هم باشند و چه نباشند، می‌توانیم بنویسیم:

$$E\bigcup F=\{x|(x\in E \wedge x\in F) \vee (x\in E \vee x\in F)\}$$

و خوانده می‌شود: مجموعهٔ اجتماع، شامل عضوهای متعلق به E و به F و عضوهای متعلق به‌این یا آن یکی، از دو مجموعه است.

تمرین

۱. به‌فرض اینکه داشته باشیم: $A=\{a,b,c,d\}$، $B=\{b,e,g\}$، $C=(b,c,d,e,f,g)$. این‌مجموعه‌ها را تشکیل دهید: الف) $A\bigcup B$، ب) $B\bigcup C$، پ) $A\bigcup B\bigcup C$، ت) $C-B$.

۲. مجموعهٔ C دانش‌آموزان یك کلاس، شامل مجموعهٔ M دانش‌آموزان شناگر و مجموعهٔ N دانش‌آموزانی است که شنا بلد نیستند. ضمناً دو مجموعهٔ M و N جدا از هم هستند. کدامیك از رابطه‌های زیر درست است: $M\bigcup N=C$، $C-M=N$، $C=M \Longleftrightarrow N=\varnothing$، $x\in C \Rightarrow x\in C \vee x\in M$، $x\in C \wedge x\notin M \Longleftrightarrow x\in N$

۳. به چه شرطی داریم: $A\bigcup B\bigcup C=\varnothing$؟

۴. آیا رابطه‌های $F\subset E$ و $E\bigcup F=E$ هم ارزند؟

۵. این گزاره را ثابت کنید:

$$(E\bigcup F=E) \wedge (F\bigcup E=F) \Longleftrightarrow E=F$$

§۵. اشتراك

۱. تعریف

اشتراك دو مجموعه عبارتست از مجموعهٔ همهٔ عضوهایی‌که در عین‌حال در هر دو مجموعه وجود داشته باشند.

اشتراك دو مجموعهٔ E و F را به‌صورت $I=E\bigcap F$ نشان می‌دهند و می‌تواند به‌صورت گزارهٔ زیر تعریف شود.

$$I=\{x|x\in E \wedge x\in F)$$

اشتراك دو مجموعهٔ جدا از هم، یك مجموعهٔ تهی است.

$A \Longleftrightarrow A\cap B=\varnothing$ و B جدا از هم هستند

۲. ویژگی‌های اشتراک

الف) جا به‌جائی: $E\cap F=F\cap E$

ب) شرکت پذیری: $(E\cap F)\cap G=E\cap(F\cap G)$

پ) پخشی نسبت به‌اجتماع

$$E\cap(F\cup G)=(E\cap F)\cup(E\cap G).$$

۳. چند مثال

الف) دوباره مجموعه‌های مذکور در ۴§ را در نظر می‌گیریم:

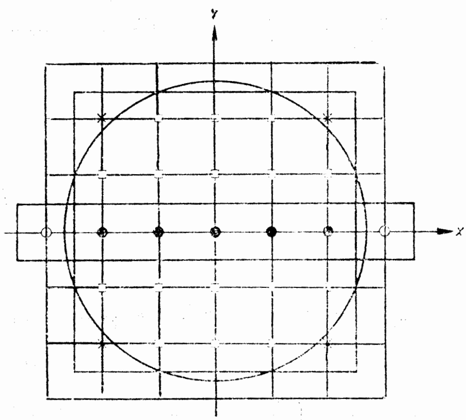
$E=\{۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹\}$، $P=\{۲،۴،۶،۸\}$،

$I=\{۱،۳،۵،۷،۹\}$، $U=\{۲،۳،۵،۷\}$

این رابطه‌ها را داریم:

$E\cap P=P$، $E\cap I=I$، $E\cap U=U$، $U\cap P=\{۲\}$؛

$P\cap I=\varnothing$، $U\cap I=\{۳،۵،۷\}$، $U\cap I\cap P=\varnothing$



شکل ۶. مجموعهٔ نقطه‌های با مختصات درست.

ب) شکل ۶، سه‌مجموعه از نقطه‌های به مختصات درست را نشان می‌دهد: مجموعهٔ C نقطه‌های به مختصات‌درست‌واقع‌در درون دایرهٔ‌به‌معادلهٔ $x^۲+y^۲=۷$ شامل ۲۱ عضو، مجموعهٔ Q نقطه‌های به مختصات درست مربع با رأسهای $(\pm۲/۵ ، \pm۲/۵)$ شامل ۲۵عضو، و مجموعهٔ R نقطه‌های به مختصات درست مستطیل به رأس‌های $(\pm۳/۵ ، \pm۰/۵)$ شامل ۷ عضو. C زیر مجموعه‌ای از Q است، یعنی $C\subseteq Q$. مجموعهٔ متمم

C نسبت به Q، یعنی $Q-C$، شامل ۴ عضو است (این ۴ نقطه با علامت × روی شکل نشان داده شده است). اشتراك $I_1=R\cap C$ شامل ۵ عضو است (با نقطه‌های سیاه نشان داده شده است). اشتراك $I_2=R\cap Q$ شامل همان ۵ عضو است ، یعنی $I_1=I_2$. مجموعهٔ متمم I_1 نسبت بـه R، یعنی $F=R-I_1$، شامل دو عضو است (با دایره‌های کوچك نشان داده شده است). مجموعه‌های F و Q جدا از هم‌هستند، یعنی $F\cap Q=\varnothing$. مجموعهٔ اجتماع $C\cup Q\cup R$ شامل همهٔ نقطه‌های به مختصات درست در شکل است.

تمرین

۱. اگر داشته باشیم: $A=(a,b,c\}$ ، $B=\{b,c,d,e\}$ ، $C=\{e,f\}$، مجموعه‌هـای $A\cap B$ ، $A\cap C$ ، $A\cap B\cap C$ ، $A\cap B\cap\varnothing$ را تشکیل دهید.

۲. اگر داشته باشیم: $Q=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ ، $R=\{۲,۴,۶,۸\}$ ، $S=\{۱,۳,۴,۵,۷\}$ ، $T=\{۲,۶,۸\}$، مجموعه‌های زیر را تشکیل دهید:

$$(Q\cap R)\cup(S\cap T),\ Q\cap R\cap S\cap T,$$
$$(Q\cup R)\cap(S\cup T),\ (R\cup T)\cap S,\ R\cup(T\cap S)$$

۳. گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

$$(E\cup F=E)\wedge(E\cap F=E)\Longleftrightarrow E=F$$
$$(F\subseteq E)\wedge(E\cap F=E)\Longleftrightarrow E=F$$

۴. قاعدهٔ پخشی زیر را ثابت کنید:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(B\cup C).$$

۵. گزاره‌ای هم‌ارز گزارهٔ زیر پیدا کنید:

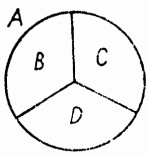
$$A\cup B=B\cap C$$

§6. دیاگرام مجموعه‌ها

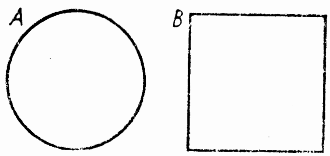
۱. نمایش مجموعه‌ها به‌کمک شکل

برای نمایش یك مجموعه به‌کمك یك شکل مستوی، از «دوره» های مختلف، و معمولاً دایره‌ای، استفاده می‌شود.

روی شکل ۷، نمایش مجموعه‌های A و B داده شده است[1].



شکل ۸. دیاگرام برای مجموعه A و زیر مجموعه‌های B، C و D دو به دو جدا از هم آن

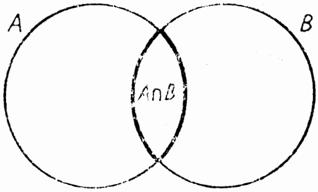


شکل۷. دیاگرام برای مجموعه‌های A و B

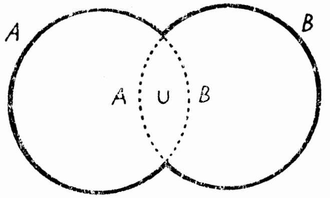
شکل ۸، یك مجموعهٔ A و سه جزء B، C و D دو به دوجدا از هم آن را نشان می‌دهد. ویژگی‌های $B\subset A$، $C\subset A$، $D\subset A$، $A-B=C\bigcup D$، $A\bigcup C\bigcup D=A$، $C\bigcap D=B\bigcap D=\varnothing=B\bigcap C$ به‌روشنی روی شکل دیده می‌شود. شکل‌های ۹ و ۱۰ به‌ترتیب، اجتماع و اشتراك دو مجموعهٔ A و B را نمایش می‌دهند. در مورد دو مجموعهٔ جدا از هم، به‌طورکلی نمایش شکل ۱۲، به‌شکل ۱۱ ترجیح داده می‌شود.

---

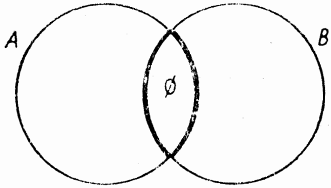
۱. دیاگرام به‌عنوان نمایش یك مجموعه، به‌وسیلهٔ لئونارداولر (۱۷۰۳-۱۷۸۳) [Leonard Euler] و جون ون (۱۸۳۴—۱۹۲۳) John Venn، وارد ریاضی شده‌است.



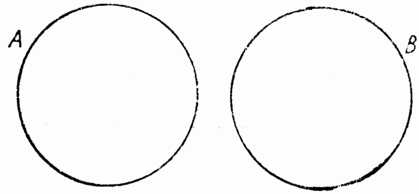
شکل ۱۰. اشتراک مجموعه‌های A و B



شکل ۹. اجتماع مجموعه‌های A و B



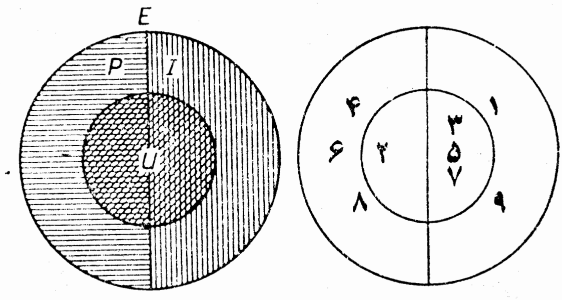
شکل ۱۲. $A \cap B = \varnothing$



شکل ۱۱. A و B جدا از هم‌اند

۳. چند مثال

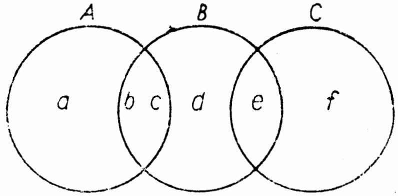
الف) مجموعه‌هـای E، P، I، U بند ۳.۵ را در نظر مـی‌گیریم،



شکل ۱۳. مجموعه‌های E، P، I، U

عمل‌های مربوطهٔ روی این مجموعه‌ها، در شکل ۱۳ نشان‌داده شده است. برای روشنی بیشتر به‌دیاگرام مجموعه‌های سمت چپ، در سمت راست همهٔ عضوهای موردنظر داده شده است.

ب) دیاگرام شکل ۱۴، حل تمرین شمارهٔ ۱ §۵ را ساده‌تر می‌کند.



شکل ۱۴. دیاگرام برای تمرین ۱ از § ۵

تمرین

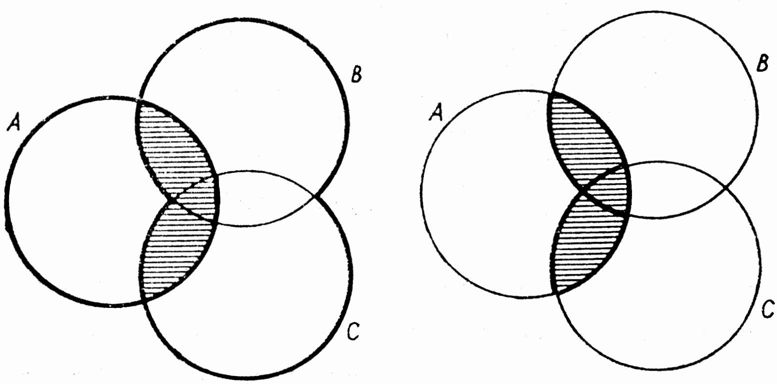
۱. روی‌یك دیاگرام، مجموعه‌های $A=\{a, b, c, d\}$، $B=\{a, b, c\}$، $C=\{b, c, f, g, h\}$ را نمایش دهید و هرکدام از عضوها را در جای مناسبش بگذارید.

۲. گزارهٔ «T را به ۶ زیر مجموعهٔ A، B، C، D، E و F نا تهی و دو به‌دو جدا از هم تقسیم کرده‌اند (دراین‌صورت، A، B، C، D، E و F، یك افراز از T را تشکیل می‌دهند)» را با یك دیاگرام نمایش دهید.

۳. برای اثبات قاعدهٔ پخشی زیر، از یك دیاگرام استفاده کنید:

$$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$$

۴. هرگاه A و B دومجموعه‌باشند، به‌نحوی که $B\subseteq A$. روی یك‌دیاگرام، متمم مجموعهٔ B را نسبت به‌مجموعهٔ A نمایش دهید.



شکل ۱۵. دیاگرام برای تمرین ۵

۵. روی شکل ۱۵، کدام رابطه نشان داده شده است؟

§۷. مجموعه‌های هم‌توان. عددهای اصلی

۱. مفهوم قوت

الف) در ابتدای این کتاب، به‌مجموعهٔ W از ۴ عضو خانوادهٔ W برخوردیم (شکل ۱). همچنین از مجموعه‌های ۴بشقاب، ۴صندلی، ۴ کارد، ۴ سیب، صحبت کردیم. همهٔ این مجموعه‌ها، ویژگی مشترك روشنی دارند: تعداد عضوهای هرکدام ازآنها برابر است با ۴.

اگر ازنوع عضوهای یك مجموعه صرفنظرکنیم، خاصیت مشترك همهٔ این مجموعه‌ها، دربرابر بودن تعداد عضوهای آنهاست.

ب) درمثال §۱. ۲ ب) بخش اول، مجموعهٔ P دانش‌آموزان‌سال پنجم دبیرستان شامل ۱۵ عضو بود. کلاس درس دارای ۱۵ جا برای نشستن بود. هرگاه S مجموعهٔ این ۱۵ جا باشد، مجموعه‌های P و S، از نظر تعداد عضوها، وجه مشترکی دارند. می‌گویند این دو مجموعه دارای یك قوت یا دارای یك عدد اصلی هستند.

برای تحقیق اینکه تعداد عضوهای P و S، یکی است، کافی است ابتداعضوهای P وسپس‌عضوهای S را بشماریم. همچنین می‌توانیم بدون شمردن، از دانش‌آموزان بخواهیم که بنشینند، اگر هر دانش‌آموز درجایی نشسته باشد، و اگر هیچ‌جای خالی وجود نداشته باشد، معلوم می‌شودکه تعداد عضوهای مجموعه‌های P و S یکی است: آنها هم‌توان هستند. می‌نویسیم:

$$\mathrm{card}\ P=\mathrm{card}\ S,\ E_q(P,S)\ \text{یا}\ P\sim S.$$

دو مجموعه هم‌توان هستند، اگر بین عضوهای آنها یك تناظر دوسوئی

وجود داشته باشد.

می‌گویند بین عضوهای دو مجموعهٔ E و F، یك تناظر دوسوئی وجود دارد، به‌شرطی که به‌هرعضو E یك عضو و تنها یك عضو از F نظیر باشد و برعکس.

۲. مثال

مجموعه‌های $L=\{a،b،c\}$ و $N=\{۱،۲،۳\}$ دارای یك تعدادعضو هستند و درنتیجه هم‌توان‌اند. بین‌عضوهای آنها می‌توان یك تناظردوسوئی برقرار کرد. این تناظر را به $۳!=۶$ نوع مختلف می‌توان نشان داد.

$a\longleftrightarrow ۲$ $b\longleftrightarrow ۱$ $c\longleftrightarrow ۳$	یا $a\longleftrightarrow ۱$ $b\longleftrightarrow ۳$ $c\longleftrightarrow ۲$	یا $a\longleftrightarrow ۱$ $b\longleftrightarrow ۲$ $c\longleftrightarrow ۳$
یا $a\longleftrightarrow ۳$ $b\longleftrightarrow ۲$ $c\longleftrightarrow ۱$	یا $a\longleftrightarrow ۳$ $b\longleftrightarrow ۱$ $c\longleftrightarrow ۲$	یا $a\longleftrightarrow ۲$ $b\longleftrightarrow ۳$ $c\longleftrightarrow ۱$

۳. دو مثال از مجموعه‌هایی که هم‌توان نیستند

الف) مجموعه‌های $A=\{a،b\}$ و $N=\{۱،۲،۳\}$ هم‌توان نیستند. می‌توان مثلاً به‌عضو a از مجموعهٔ A، عضو ۱ از مجموعهٔ N وبه‌عضو b از A، عضو ۳ از N رانظیرکرد. ولی این تناظردوسوئی نیست، زیرابه عضو ۲ از N، هیچ عضوی از A نظیر نمی‌شود.

ب) شکل ۱۶ نشان می‌دهد که غالباً در یك وسیلهٔ‌نقلیهٔ عمومی،مجموعهٔ مسافرهاومجموعهٔ جاهای نشستن،هم‌توان نیستند.

شکل ۱۶. مجموعه‌های ناهم‌توان، در وسیلهٔ نقلیهٔ عمومی

۴. ویژگی‌های رابطهٔ هم‌توانی

یك رابطهٔ هم‌توانی

الف) بازتاب است:

$$\text{card } E = \text{card } E$$

ب) متقارن است:

$$\text{card}E = \text{card } F \Rightarrow \text{card } F = \text{card } E$$

ب) سرایت‌پذیر است:

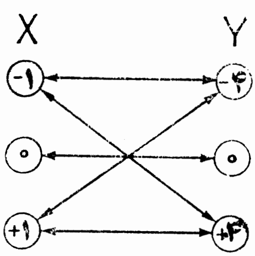
$$(\text{card}E = \text{card}F) \wedge (\text{card}F = \text{card } G) \Rightarrow \text{card}E = \text{card}G.$$

۵. رابطه، تابع، نگاشت

الف) یك رابطهٔ $\mathscr{R}$ بین دو مجموعهٔ X و Y، با داده شدن یك مجموعهٔ G زوج‌های (x,y)، که درآن $x\in X$ و $y\in Y$ است، تعریف می‌شود: دو عضو x از X و y از Y، با رابطهٔ $\mathscr{R}$ به‌هم مربوط می‌شوند، به‌شرطی‌که $(x,y)\in G$.

در یك رابطه، به‌یك عضو X ممکن است چند عضو Y نظیر شود و برعکس.

مثال. مجموعهٔ $G=\{(x,y)|y^۲=۱۶x^۲\}$ یك رابطهٔ نادوسوئی‌را (شکل ۱۷) بین مجموعه‌های $X=\{-۱, ۰, +۱\}$ و $Y=\{-۴, ۰, +۴\}$ مشخص می‌کند.



شکل ۱۷. تناظر نادوسوئی

ب) اگر رابطه طوری باشد که به‌هر عضو x از X، یك عضو y از Y و تنها یکی نظیر باشد، گویند که‌یك رابطهٔ تابعی تعریف‌شده است، یا اینکه یك تابع روی X تعریف شده است که مقدارهایش را در Y اختیار می‌کند.

مجموعهٔ X را مجموعهٔ عزیمت یا مجموعهٔ آرگومان های تابع، و مجموعهٔ Y را مجموعهٔ مقصد می‌نامند. مجموعهٔ عضوهایی از Y، که نظیر عضوی از X باشد، مجموعهٔ مقدارهای تابع نامیده می‌شود.

چنین رابطهٔ f را نگاشت (یا گسترش) از X در Y نیز می‌نامند و با علامت $X \to Y$ نشان می‌دهند.

اگر مجموعهٔ عزیمت برابر مجموعهٔ مقصد باشد، گویند که نگاشت از X به‌روی Y است و درصورت خلاف آن گویند که نگاشت از X به‌توی Y است.

پ) یك تابع f از X به‌توی Y را به‌این ترتیب نشان می‌دهند.

$$x \to y \text{ یا } x \to f(x) \text{ یا } x \to y=f(x)$$

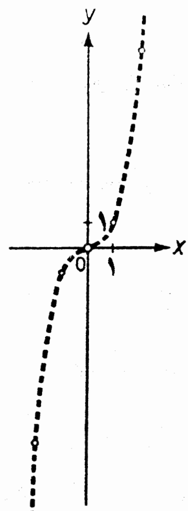
بیان $y=f(x)$ را معادلهٔ تابع می‌نامند، که نشان می‌دهد از آرگومان x با کدام جریان ریاضی، می‌توان به‌مقدار y رسید.

دربند ۳.۴ دیدیم که می‌شد به‌مجموعه $G=\{(x,y)|y=f(x)\}$، نمایش نموداری تابع را همراه کرد.

مثال. تابع $y=f(x)=x^۳$، یا به‌طور ساده $x \to x^۳$، مجموعهٔ آرگومان‌های $\{+۲، ۱، ۰، -۱، -۲\}=X$ را روی مجموعهٔ $\{۸، ۱، ۰، -۱، -۸\}=Y$ می‌نگارد. نمودار مجموعهٔ زوج‌های

$G=\{(-۲، -۸)، (-۱، -۱)، (۰،۰)، (۱،۱)، (۲،۸)\}$

روی شکل ۱۸ داده شده‌است. ولی تابع $y=x^۳$، مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی را به‌روی خودش می‌نگارد. مجموعهٔ زوج‌های نظیر، روی همان



شکل ۱۸. نمودار تابع $y=x^۳$

شکل با نقطه‌چین نشان‌داده شده است.

ت) اگر یك نگاشت از X به روی Y طوری باشد که به‌ازای هر عضو y از Y، یك عضو x از X، و فقط یکی، وجود داشته‌باشد، به‌نحوی‌که داشته باشیم $y=f(x)$، گویند که نگاشت یك به‌یك است.

نگاشتی‌که درعین حال«به‌روی» و «یك به‌یك» باشد، یك‌نگاشت دوسوئی است.

در مثال قبل، $y=x^{۳}$، یك نگاشت دوسوئی را مشخص می‌کند.

اگر یك نگاشت، دوسوئی باشد، می‌توان یك نگاشت وارون را به‌آن‌نسبت داد. به‌این نگاشت وارون، تابع وارون تابع f نظیر است‌که با علامت $f^{-۱}$ نشان داده می‌شود.

در § ۳.۷ نشان داده شدکه دومجموعه، وقتی‌که در یك نگاشت دو سوئی باشند، هم‌توان هستند. برای اثبات هم‌توانی دو مجموعه کافی است ثابت شودکه یك نگاشت دوسوئی از یکی به‌روی دیگری وجود دارد.

مثال. مجموعه‌های

$$X=\{۱, ۲, \ldots, ۱۰۰\}, Y=\{۵, ۷, ۹, \ldots, ۲۰۳\}$$

هم‌توان‌هستند، زیرا تابع $y=۲x+۳$ (تابع وارون: $x=\frac{y-۳}{۲}$)، یك نگاشت دوسوئی از X به‌روی Y (از Y به‌روی X) رامشخص می‌کند.

۶. عددهای اصلی

الف) برای دومجموعه هم‌توان می‌گویندکه آنها دارای یك‌قوت و یا دارای یك عدد اصلی هستند.

عدد اصلی یك مجموعهٔ E را با card E نشان می‌دهند. مثلاً اگر $M=\{a, b, c, d, e\}$ و $N=\{s, t, u, v, w\}$ باشد:

$$\text{card } M=\text{card}\{a,b,c,d,e\}=m=5$$
$$\text{card } N=\text{card}\{s,t,u,v,w\}=n=5$$

و بنابراین $m=n$.

به‌طورکلی، ۵ عدد اصلی یا قوت هر مجموعهٔ ۵ عضوی است.

حالا دیگر می‌توانیم، تعریفی را که کانتور کرده است، بفهمیم:

قوت یا عدد اصلی یك مجموعه، عبارت از مفهومی است که به ما امکان می‌دهد که درك مجردی را به‌مجموعه نسبت دهیم، بدون اینکه از ماهیت عضوهای آن و یا ترتیب آنها آگاهی داشته باشیم.

ب) گزارهٔ زیـر تنها برای مجموعه‌های متناهی درست است، و خواهیم دید که می‌تواند وسیلهٔ تمیز این مجموعه‌ها باشد.

مجموعهٔ E قوتی بزرگتر از مجموعهٔ F دارد، به‌شرطی که F بتواند با یکی از مجموعه‌های E هم‌توان باشد، درحالی‌که E نمی‌تواند هم‌توان یکی از زیر مجموعه‌های F باشد.

مثال. $E=\{a,b,c,d\}$ ، $F=\{1,2,3\}$، F هم‌توان جزئی ازE، یعنـی $P=\{a,b,c\}$ است : $P\subset E$ و $\text{card}P=\text{card}F$. ولـی E با هیچکـدام از زیر مجموعه‌هـای F، هـم‌تـوان نیست . از آنجـا $\text{card}E>\text{card}F$، چیزی که می‌توانستیم، خیلی ساده‌تر و با توجه به نامساوی $3<4$، مشخص کنیم.

یادداشت. همهٔ تعریف‌ها و عمل‌های نظریهٔ مجموعه‌ها ـ که تااینجا توضیح داده شده است ، در مورد مجموعه‌های متناهی به‌کار رفته است ، تنها مجموعه‌هایی که تا اینجا مورد نظر بوده‌اند. ولی، همین مفهوم‌هایی که دربخش اول، با معرفت شهودی ویا حتی به‌طور بدیهی به‌دست آمدند، دربخش دوم و در مورد مجموعه‌های نا متناهی، اهمیت جدی پیدا خواهند کرد.

تمرین

۱. در دوروبر خود، مجموعه‌های هم‌توان را پیدا کنید.

۲. چند نگاشت از مجموعهٔ $E=\{a،b،c،d\}$ به‌روی خودش وجود دارد؟ چندتا از آنها را بنویسید.

۳. هرگاه P مجموعهٔ نقطه‌های به‌مختصات درست واقع در درون و روی محیط دایرهٔ $x^۲+y^۲=۴$، و Q مجموعهٔ نقطه‌های با مختصات درست واقع در درون و روی محیط مربع به‌رأس‌های $(\pm ۲، \pm ۲)$ باشد:

الف) آیا یکی از مجموعه‌های P و Q، زیر مجموعه‌ای محض‌ازدیگری است؟

ب) مقطع (اشتراك) P و Q را معین کنید.

پ) قوت $Q-P$ را پیدا کنید.

ت) اگر نقطه‌های واقع برمحیط را درهرکدام ازشکل‌ها کنار بگذاریم، آیا دو مجموعه هم‌توان هستند؟

۴. هرگاه $X=\{۱،۲،۳،۴، ...، ۱۰\}$ باشد، بین تابع‌های زیر آنهایی‌را پیدا کنید که با آغاز از X، مجموعه‌های هم‌توان با X تولیدکنند.

الف) $y=۴x-۳$، ب) $y=۲x$، پ) $y=x^۳$، ت) $y=sin\frac{\pi}{۴}x$،

ث) $y=\ln x$.

۵. یك تابع درکدام شرط لازم وکافی‌باید صدق‌کند تا اینکه به‌نحو دوسوئی بتواند از دو مجموعهٔ هم‌توان، یکی را روی دیگری بنگارد.

۶. هرگاه P مجموعهٔ نقطه‌های به‌مختصات درست واقع در درون دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲=۷$، و Q مجموعهٔ همهٔ عددهای اول دو رقمی‌باشد، کدام یك از رابطه‌های زیر درست است؟

$\mathrm{card}Q<\mathrm{card}P$، $\mathrm{card}Q=\mathrm{card}P$ یا $\mathrm{card}Q>\mathrm{card}P$

۷. در یك مجلس رقص چگونه می‌توان تحقیق کردکه مجموعهٔ آقایان با مجموعهٔ خانم‌ها هم‌توان است؟

۸. هرگاه دومجموعهٔ $X=\{۱،۲،۳،۴،۵\}$ و $Y=\{-۱،+۱\}$ را داشته باشیم، مطلوبست مجموعهٔC زوج‌های نظیر رابطهٔ

$(x،y)\in C \Longleftrightarrow x\in X \wedge y\in Y \wedge y=(-۱)^x$

۹. نگاشتی پیدا کنید که مجموعهٔ $X=\{۱،۲،۳،۴،۵\}$ را روی مجموعهٔ $Y=\{۵،۲۰،۴۵،۸۵،۱۲۵\}$ بنگارد.

۱۰. مجموعهٔ Y مقادیر تابع $y=f(x)=۲x^۳-۹x^۲+۱۰x$ را که به مجموعهٔ عزیمت $X=\{۰،۱،۲،۳\}$ نگاشته شده‌است، پیدا کنید. آیا مجموعه‌های X و Y هم‌توان هستند؟

۱۱. اگر $X=\{۱،۲،۳،...،۱۰\}$، و Y مجموعهٔ مقادیر تابع $y=cos\frac{\pi}{۴}.x$ نگاشته شده به X باشد، آیا مجموعه‌های X و Y دارای یك عدد اصلی هستند؟

۱۲. تحقیق کنید که مجموعهٔ جواب‌های $S=\{x|x^۲-۴x+۴=۰\}$، و زیر مجموعهٔ T از مجموعهٔ عددهای اول U، به‌قسمی که $T\{x|x\in U \wedge ۱۱۰<x<۱۲۶\}$، هم‌توان‌هستند؟

۱۳. مجموعهٔ زوج‌های C را تعیین کنید، به‌شرطی‌که

$$C=\{(x،y)|x^۲+y^۲=۲۵ \wedge y=x^۲-۵\}$$

۱۴. یك نگاشت دوسوئی از مجموعهٔ $X=\{۱،۲،۳،...،۱۰۰\}$ به‌روی مجموعهٔ $Y=\{۲،۴،۶،...،۲۰۰\}$ پیدا کنید.

۱۵. از نتیجهٔ تمرین قبل، برای اثبات اینکه، مجموعهٔ عددهای زوج، هم‌توان مجموعهٔ عددهای طبیعی است، استفاده کنید.

بخش دوم

مجموعه‌های نامتناهی

III. مجموعه‌های شمارا

§۸. هم‌توانی و عددهای اصلی ترانسفینی

۱. هم‌توانی مجموعه‌های نامتناهی

درتمرین۱۴ بخش‌پیش، از روی‌تابع $y=2x$، یك‌تناظر دوسوئی بین‌مجموعهٔ $X=\{1,2,3,\ldots,100\}$ ومجموعهٔ $Y=\{2,4,\ldots,200\}$ برقرار کردیم. ولی تابع $y=2x$، بیش از این امکان دارد. این تابع به‌هر عدد درست طبیعی، یك عدد زوج مثبت را نظیر قرار می‌دهد. بنابراین، مجموعه‌های N و P هم‌توان هستند و بنا به‌تعریف هم‌توانی، دارای یك عدد اصلی می‌باشند. با این وصف باید در نظر گرفت که با شمردن عضوهای N و سپس P، نمی‌توان هم‌توانی را ثابت کرد، زیرا هرکدام از این مجموعه‌ها، نامتناهی هستند و تعداد عضوهای آنها، بی‌نهایت بزرگ است.

مجموعهٔ عددهای درست طبیعی، که از کوچك به‌بزرگ مرتب شده باشد، یعنی $N=\{1,2,3,\ldots\}$، مجموعه‌ای است بی‌انتها، از عضوهای کاملاً معین، که تعداد آنها از هر عدد درست از پیش داده

شده‌ای، بزرگتر است. ما دراینجا نمی‌توانیم صحبتی از «تعداد» عضو-های مجموعه، به‌معنای مقدماتی و متعارف آن، پیش بیاوریم.

۲. بی‌نهایت بالفعل و بی‌نهایت بالقوه

گفتیم که مجموعهٔ N نامتناهی است. بعلاوه در آنالیز ثابت می‌شود که $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ (می‌خوانیم: وقتی که x به‌سمت صفر میل می‌کند، $\frac{1}{x}$ به‌سمت بی‌نهایت می‌رود). یا با مراجعهٔ به‌تعریف حد، با انتخاب یك عدد به‌قدرکافی کوچك برای x، $\frac{1}{x}$ می‌تواند از هرعدد از پیش داده شده‌ای، بزرگتر شود. دراین حالت گوییم که با بی‌نهایت بالقوه سروکار داریم، برخلاف قوت مجموعهٔ N، که یك بی‌نهایت بالفعل است. در مفهوم اخیر، سروکار ما با بی‌نهایتی است مفروض، به‌عنوان موجودی‌که مستقل از مفهوم حد، وجود دارد.

یادداشت: نماد ∞، نمایشگر یك عدد نیست، ولی بیان می‌کند که $\frac{1}{x}$، وقتی x به‌سمت صفر میل کند، بی‌نهایت بزرگ می‌شود.

۳. فرق بین مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

هم‌توانی مجموعه‌های P و N، امکان می‌دهد که یك ویژگی جالب مجموعه‌های نامتناهی را روشن‌کنیم: P، زیر مجموعه‌ای محض از N و دارای همان‌توان N است، یعنی $P \subset N$ و $P \sim N$. درصورتی که درحالت دومجموعهٔ متناهی A و B، ثابت کردیم که ویژگی‌های $A \subset B$ و $A \sim B$ با هم سازگار نیستند.

به‌عنوان مثال، اگر $A = \{۱،۲،۳\}$ و $B = \{۱،۲،۳،۴،۵\}$، داریم:

$A \subset B$، ولی $\text{card}A < \text{card}B$ و $\text{card}(B - A) < \text{card}B$.

ریچارد دوکیند (۱۸۳۱-۱۸۸۰)، از این ویژگی برای تعریف مجموعه‌های متناهی و مجموعه‌های نامتناهی استفاده کرده است:

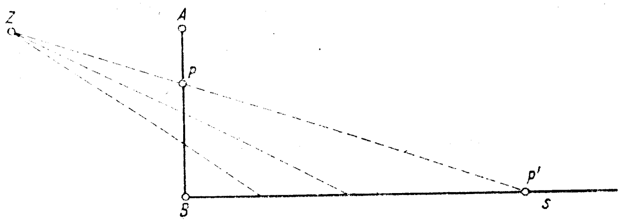
اگر هیچ زیر مجموعهٔ محضی از یک مجموعهٔ E ، هم‌توان E وجود نداشته باشد، E یک مجموعهٔ متناهی است.

اگر دست کم یک زیر مجموعهٔ محض از مجموعهٔ E، هم‌توان باE وجود داشته باشد، E یک مجموعهٔ نامتناهی است.

توجه کنیم که درمورد این تعریف‌ها، اصل اقلیدس «کل بزرگتر از هرکدام از جزءهای خود است»، درآنجا که با مجموعه‌های نامتناهی سروکار داریم، نادرست است.

۴. چند مثال

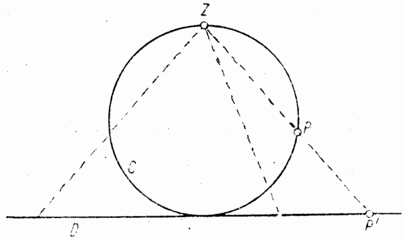
الف) مجموعهٔ نقطه‌های یک پاره خط، و مجموعهٔ نقطه‌های یک نیم خط، هر دونامتناهی‌اند. اما این دومجموعه دارای یک توان هستند. برای اثبات این مطلب، شکل ۱۹ را درنظر می گیریم.



شکل ۱۹. دو مجموعهٔ هم‌توان از نقطه‌ها

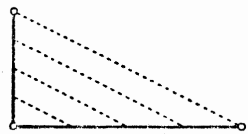
با یک تصویر به‌مرکزZ، می‌توان به‌هر نقطهٔ P از پاره خط AB، یک‌نقطهٔ P′ از نیم خط BS را متناظر کرد و برعکس. ضمناً نقطهٔ A از پاره خط، متناظر با نقطهٔ بی‌نهایت از نیم خط است.

ب) به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد (شکل ۲۰)، که مجموعهٔ نقطه‌های یک خط، با مجموعهٔ نقطه‌های محیط یک دایره، هم‌توان است.



شکل ۲۰. دو مجموعهٔ هم‌توان از نقطه‌ها

پ) مجموعهٔ نقطه‌های یك پاره خط به‌طول ۱/۵ سانتیمتر بامجموعهٔ نقطه‌های یك پاره خط به‌طول ۳ سانتیمتر، هم‌توان‌است. اثبات روی شکل ۲۱ داده شده است.



شکل ۲۱. دو مجموعهٔ هم‌توان از نقطه‌ها

ت) مجموعهٔ عددهای طبیعی $\{۱،۲،۳،...\}=N$، با مجموعهٔ‌عدد‌های فرد $\{۱،۳،۵،...\}=I$، هم‌توان است، یا $I\subset N$ و $I \sim N$. برای اثبات کافی است تحقیق شود کــه عضوهــای دو مجموعه، به‌وسیلهٔ تابع $i=۲n-۱$، که در آن $i\in I$ و $n\in N$، نظیر یکدیگرند.

۵. عددهای اصلی ترانسفینی

مجموعه‌های هم‌توان، با عددهای اصلی برابر، مشخص می‌شوند. درحالت مجموعه‌های متناهی، عدد اصلی، یك عدد اصلی طبیعی است که از شمردن عضوهای مجموعه حاصل می‌شود.

همین مفهوم عدد اصلی را برای مجموعه‌های نامتناهی هم به‌کار برده‌اند و از آنجا اصطلاح عددهای اصلی ترانسفینی به‌وجود آمده‌است. در بندهای بعدی، مجموعه‌های دارای عدد اصلی ترانسفینی، به‌تفصیل

مورد بررسی قرارگرفته است.

تمرین

۱. ثابت کنید که مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر یك ضلع مثلث، با مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر ضلع دیگر، هم‌توان است.

۲. بین مجموعه‌های $\{...,۳,۲,۱\}=N$ و $\{...,۱۰۰,۱۰,۱\}=D$ یك تناظر دو سوئی ایجاد کنید.

۳. با استفاده از تصویر، هم‌توانی مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر محیط یك نیم دایره را با هرکدام از مجموعه‌های زیر ثابت کنید:
الف) مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر یك خط، ب) مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر یك نیم خط، پ) مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر یك پاره خط.

۴. تعداد نگاشت‌های یك مجموعهٔ متناهی n عضوی را روی خودش بشمارید.

۵. نشان دهید که مفهوم‌ها، تعریف‌ها و ویژگی‌های اثبات شده برای مجموعه‌های‌متناهی (دربخش اول)، برای‌مجموعه‌های نامتناهی‌هم‌درست است.

۹§. مجموعه‌های شمارا

۱. مفهوم شمارا بودن

ساده‌ترین مجموعهٔ نامتناهی، مجموعهٔ N عددهای درست طبیعی است: $\{...,۳,۲,۱\}=N$. قوت N را قوت شمارا گویند و همهٔ مجموعه‌های هم‌توان N، بنابه‌تعریف، مجموعه‌هایی شمارا هستند.

مجموعهٔ E را شمارا گویند، وقتی که یك نگاشت دوسوئی از مجموعهٔ N عددهای طبیعی روی E وجود داشته باشد.

مجموعه‌های شمارا آنهائی هستند که عضوهای آنها را بتوان

در یك رشته مرتب کرد، یعنی مجموعه‌هایی که درآنها، یك عضو یکم، یك عضو دوم، یك عضو سوم، ...، وجود داشته باشد.

به‌عنوان مجموعه‌های شمارا، تا اینجا با مجموعه‌های $I=\{۱،۳،۵،...\}$ و $P=\{۲،۴،۶،...\}$ ، آشنا شده‌ایم.

مجموعه‌های متناهی را، مجموعه‌های کاملاً شمارا هم می‌گویند.

۲. مجموعهٔ عددهای اول

مجموعهٔ عددهای‌اول $U=\{۲،۳،۵،۷،۱۱،۱۳،...\}$ ، مجموعه‌ای نامتناهی است. به‌هر عدد اول می‌توان یك عدد اول بزرگتر را نظیر کرد. برای روشن‌کردن این مطلب، از روش استدلال اقلیدس استفاده می‌کنیم. اگر ۲، ۳، ۵، ۷، ...، p_n، n عدد اول نخستین باشند، و اگر عدد درست $r=۲\times۳\times۵\times...\times p_n+۱$ را تشکیل‌دهیم، روشن‌است که عدد r بر هیچکدام از عددهای ۲، ۳، ۵، ...، p_n بخش پذیر نیست، درنتیجه یا خود r، عددی اول بزرگتر از p_n است، یا اینکه بر عدد - های اولی بزرگتر از p_n بخش‌پذیر است.

حالا، عددهای اول را به‌ترتیب (مثلاً) صعودی تنظیم می کنیم. تناظر بین عضوهای U و عضوهای N، به‌ترتیب زیر برقرار می‌شود:

$$N=\{۱،۲،۳،۴،۵،۶،...،۱۰۰،...\}$$
$$U=\{۲،۳،۵،۷،۱۱،۱۳،...،۵۴۱،...\}$$

بنابراین داریم: $card\,N=card\,U$ و نتیجه می‌گیریم:

مجموعهٔ عددهای اول مجموعه‌ای شماراست.

یادداشت: ریاضی‌دانان فرانسوی ژاك آدامار - Jaques Hadamard و شارل دولاواله پوسن (Charles de la Vallée Poussin)، درسال ۱۸۹۶ میلادی، قضیهٔ بنیادی نظریهٔ عددهای‌اول را ثابت کردند. اگر $\pi(n)$، تعداد عددهای اول کوچکتر یا مساوی n باشد،

رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln n}}=1 \qquad (1)$$

که از روی جدول زیر، روشن‌تر نشان‌داده می‌شود:

n	$\pi(n)$	$\frac{n}{\ln n}$	$\pi(n):\frac{n}{\ln n}$
۱۰۰	۲۵	۲۱/۷ ...	۱/۱۵۱ ...
۱۰۰۰	۱۶۸	۱۴۴/۷ ...	۱/۱۶۰ ...
۱۰۰۰۰	۱۲۲۹	۱۰۸۵/۷ ...	۱/۱۳۲ ...
۱۰۰۰۰۰	۹۵۹۲	۸۶۸۵/۸ ...	۱/۱۰۴ ...
۱۰۰۰۰۰۰	۷۸۴۹۸	۷۲۳۸۲/۴ ...	۱/۰۸۴ ...
۱۰۰۰۰۰۰۰	۶۶۴۵۷۹	۶۲۰۴۲۰/۶ ...	۱/۰۷۱ ...

دستور (۱) به‌اثبات شمارا بودن مجموعهٔ عددهای اول کمک‌می‌کند، زیرا $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ \frac{n}{\ln n}=\infty$. همین دستور، درعین حال تصوری از پخش عددهای اول در مجموعهٔ عددهای درست به‌دست می‌دهد.

تا امروز ثابت نشده است که آیا مجموعهٔ دوتایی‌ها (۴۱، ۴۳ یا ۱۹۴۹، ۱۹۵۱) ویامجموعهٔ چهارتایی‌های (۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹یا ۲۹۹۴۷۱، ۲۹۹۴۷۳، ۲۹۹۴۷۷، ۲۹۹۴۷۹) متناهی است یا نامتناهی.

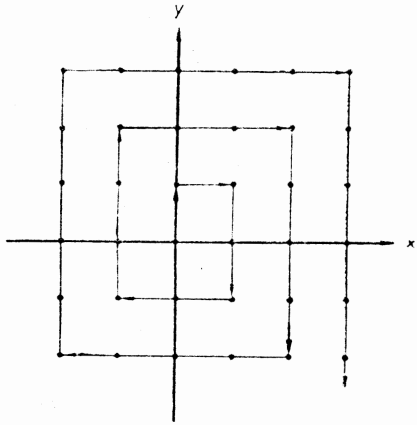
۳. مجموعهٔ مجذورهای عددهای درست

مجموعهٔ‌مجذورهای‌عددهای‌درست $N^2=\{1,4,9,25,\ldots\}$ شمارا است، زیرا مجموعه‌ها N وN^2 را با نگاشت $y=x^2$ به‌ازای $x\in N$ و $y\in N^2$، می‌توان درتناظر دوسوئی قرارداد. درآنجا نیز به‌طور همزمان

داریم: $N^2 \subset N$ و $N \sim N^2$.

۴. مجموعهٔ نقطه‌های به‌مختصات درست صفحه

مجموعهٔ نقطه‌های به‌مختصات درست صفحه، مجموعه‌ای شماراست.



شکل ۲۲. مجموعهٔ نقطه‌های به‌مختصات درست صفحهٔ دکارتی، شمارا است

با مرتب کردن نقطه‌های به مختصات درست صفحه، طبق طرح شکل ۲۲، می‌توان آنها را در یك رشته ردیف کرد، و درنتیجه عددهای درست طبیعی را بایك نگاشت دوسوئی باآنها، نظیر کرد. این رشته، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P=\{(0,0), (0,1), (1,1), (1,0), (1,-1), (0,-1), \ldots\}$$

۵. مجموعهٔ Z عددهای درست

مجموعهٔ عددهای درست، عبارتست از اجتماع عددهای درست مثبت، عددهای درست منفی وعدد صفر. برای اثبات اینکه‌این‌مجموعه شمارا است، کافی است، آن را به‌شکل رشتهٔ زیر بنویسیم:

$$Z=\{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots\}$$

مجموعهٔ عددهای درست، مجموعه‌ای شمارا است.

تمرین

۱. آیا مجموعهٔ S، سه‌تائی‌های فیثاغورث

$$S=\{(x,y,z) | x^2+y^2=z^2 \wedge x,y, z\in N\}$$

یك مجموعهٔ شمارا است؟

۲. قوت مجموعهٔ T را تعیین کنید:

$$T=\{x \mid \sin\frac{\pi}{۲}x=۱ \wedge x\in R\}$$

۳. آیا مجموعهٔ نقطه‌های به‌مختصات درست واقع بر خط

$$y=۰/۷۵x+۱$$

مجموعه‌ای شمارا است؟

۴. آیا مجموعهٔ نقطه‌های به‌مختصات درست واقع بر هذلولی $y=\frac{۱}{x}$، شمارا است؟

۵. آیا مجموعهٔ عددهای اول واقع در بین ۱۰۷۰ و ۱۰۸۰ شمارا است؟

§ ۱۰. مجموعهٔ عددهای گویا

۱. تعریف

عددی را گویا گوییم‌که بتوان آن را به‌صورت یك کسر تحویل ناپذیر در آورد، یعنی کسری که صورت و مخرج آن نسبت به‌هم اول باشد.

۲. رابطهٔ ترتیب روی مجموعهٔ عددهای گویا

مجموع صورت و مخرج یك کسر را رتبهٔ آن می‌نامیم. عدد-های گویا را به‌ترتیب رتبهٔ صعودی، و ضمن آن، کسرهای هم‌مرتبه را برحسب مقدار صعودی آنها، می‌نویسیم:

کسرهای رتبهٔ ۲ عبارتند از: $\frac{۱}{۱}=۱$

کسرهای رتبهٔ ۳ عبارتند از: $\frac{۱}{۲}\,,\,\frac{۲}{۱}=۲$

کسرهای رتبهٔ ۴ عبارتند از: $\frac{۱}{۳}\,,\,\frac{۳}{۱}$

(کسر $\frac{۲}{۲}$ را که تحویل پذیر است، کنار می‌گذاریم).

کسرهای رتبهٔ ۵ عبارتند از: $\frac{۱}{۴}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۲}, \frac{۴}{۱}$

صفر را در اول این رشته جا می‌دهیم و فرض می‌کنیم که از کسرهای دیگر، هیچ‌کدام برابر صفر نباشند. بالاخره به‌هر کسر، کسر قرینه را همراه می‌کنیم. درنتیجه، مجموعهٔ

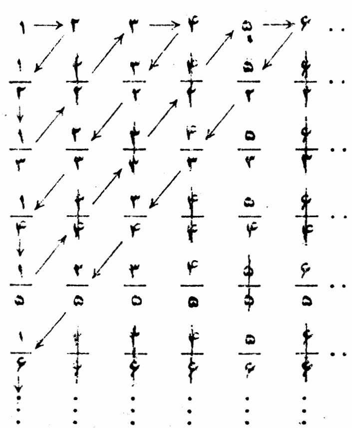
$$Q=\{۰, ۱, -۱, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, ۲, -۲, \frac{۱}{۳}, -\frac{۱}{۳}, ۳, -۳, \ldots\}$$

به‌دست می‌آید. دراین رشته، هر عدد گویا دارای ردیفی کاملاً مشخص است و یک تناظر دوسوئی بین مجموعه‌های Q و N برقرار می‌شود. بنابراین Q و N هم‌توان هستند.

دراینجا هم باید توجه‌کرد که به‌طور هم‌زمان داریم: $N\subset Q$ و $N\sim Q$.

۳. روش قطری

شمارا بودن مجموعهٔ عددهای گویا را، با روش موسوم به‌روش قطری هم، می‌توان ثابت‌کرد.



درجدول مقابل، همهٔ کسرهای تحویل‌پذیر را خط می‌زنیم. با درنظر گرفتن عددهای جدول، به‌ردیفی که نشان داده شده است، رشته‌ای به‌دست می‌آید، که اگر صفر را در اول و قرینهٔ هرعدد را به‌دنبال آن اضافه کنیم، رشتهٔ $\overline{Q}$ به‌دست می‌آید:

$$\overline{Q}=\{0,1,-1,2,-2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},3,-3,\ldots\}$$

بدیهی است که $Q=\overline{Q}$، و تنها وضع قرارگرفتن کسرهای هم‌رتبه در دو مجموعه با هم تفاوت دارد. روی هر قطر جدول، کسرهای هم‌رتبه قرار دارند، ولی مقدار کسرهای یك قطر، وقتی از یك قطر به قطر دیگر می‌گذریم، یك درمیان، افزایش و کاهش می‌یابد.

تمرین

۱. اگر دو عدد گویای q_1 و q_2 نزدیك به‌هم باشند، آیا همیشه عددهای گویای دیگری بین q_1 و q_2 قرار دارد؟

۲. رابطه‌های $I\subset N$، $P\subset N$، $N\subset Z$، $Z\subset Q$ را ثابت کنید وملاحظه کنید که با وجود این $I\sim P\sim N\sim Z\sim Q$.

۳. با روش قطری ثابت کنید که مجموعهٔ نقطه‌های با مختصات درست واقع در ربع اول، شمارا است.

۴. با استفاده از روش تمرین قبل، ثابت کنید که مجموعهٔ نقطه‌های با مختصات درست صفحه، شمارا است.

۵. آیا مجموعهٔ عددهای گویا با مجموعه جواب‌های

$$S=\{x|ax+b=0;\ a,b\in Z\wedge a\neq 0\}$$

برابر است؟

§۱۱. مجموعه عددهای جبری

۱. تعریف

عدد جبری عبارتست از هر عددی (حقیقی یا موهومی)، که بتواند ریشهٔ یك معادلهٔ جبری با ضریب‌های درست، به‌شکل زیر باشد:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

که در آن a_n، a_{n-1}، ...، a_2، a_1 و a_0، عددهایی درست و n، یك عدد درست طبیعی و $a \neq 0$ است.

(روشن است که اگر ضریب‌ها، عددهایی گویا باشند، می‌توان با ضرب دوطرف معادله در یك عدد درست مناسب، آن‌را به‌حالت قبل تبدیل کرد).

به‌خصوص عددهای گویا، به‌عنوان ریشهٔ معادله‌های درجهٔ یکم به‌صورت $mx - p = 0$، عددهایی جبری هستند و به‌این ترتیب، عدد‌های گویا، تنها «بخش کوچکی» از مجموعهٔ عددهای جبری را تشکیل می‌دهند. به‌ازای $n = 2$، سروکلهٔ عددهـای گنگ و عددهای موهومی پیدا می‌شود. مثلاً $a = \sqrt{2}$، ریشهٔ معادلهٔ $x^2 - 2 = 0$ و $x = 1 + i$، ریشهٔ معادلهٔ $x^2 - 2x + 2 = 0$ است.

۲. رتبهٔ یك معادلهٔ جبری

یکی از نتیجه‌های بسیار مهمی که به‌وسیلهٔ کـانتور ثابت شد، این است کـه مجموعهٔ عددهـای جبری، ـ کـه شامل همهٔ مجموعه‌های بررسی شده، و درنتیجه شامل عضوهایی «خیلی بیشتر» از آنهاست ـ مجموعه‌ای شمارا است (واژهٔ «بیشتر» به‌مفهوم ابتدایی آن به‌کارگرفته شده است). برای اثبات این‌قضیه، ابتدا مفهوم مرتبهٔ یك معادلهٔ جبری را وارد می‌کنیم، و از روی‌این مفهوم، عددهای جبری را، دریك رشته منظم می‌کنیم.

رتبهٔ معادلهٔ جبری

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

عبارتست از عدد درست و مثبت

$$r = n + |a_n| + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$$

هر عدد r متناظر است با تعداد کاملاً مشخصی از معادله‌های جبری با رتبهٔ r، و هر معادلهٔ جبری درجـهٔ n، متناظـر است با n عدد جبری،

که ریشه‌های آن هستند.

برای ساختن این رشته، به‌طرز زیر عمل کنیم:

۱. عددهای جبری را به‌ترتیب صعودی رتبهٔ معادله‌هایی که این عددها ریشه‌های آنها می‌باشند، مرتب می‌کنیم.

۲. ریشه‌های معادله‌های هم‌رتبه را به‌ترتیب صعودی درجه‌های این معادله‌ها، مرتب می‌کنیم.

۳. ریشه‌های معادله‌های هم‌رتبه و هم‌درجه را به‌ترتیب صعودی مقدار خود این ریشه‌ها، مرتب می‌کنیم (عددهای مختلط، به‌ترتیب صعودی بخش‌های حقیقی آنها، و درصورت برابر بودن این بخش‌ها، به‌ترتیب صعودی بخش‌های موهومی آنها تنظیم می‌شوند).

به‌این‌ترتیب، رشتهٔ زیر به‌دست می‌آید:

الف) $r=۱$ ممکن نیست، زیرا باید داشته باشیم: $n=۰$ و $a_۰=\pm ۱$، رابطه‌ای که به‌برابری نادرست $۰=\pm ۱$، منجر می‌شود.

ب) به‌ازای $r=۲$، امکان‌های $n=۱$، $a_۱=\pm ۱$ و $a_۰=۰$ را داریم، که به‌معادله‌های $\pm x=۰$، با تنها ریشهٔ ۰، منجر می‌شود.

پ) به‌ازای $r=۳$، امکان‌های زیر را داریم:

$n=۱,\ a_۱=\pm ۲,\ a_۰=۰$ یا $\pm ۲x=۰,\ x=۰$

$n=۱,\ a_۱=\pm ۱,\ a_۰=۱$ یا $\pm x\pm ۱=۰,\ x=\pm ۱$

$n=۲,\ a_۲=\pm ۲,\ a_۱=a_۰=۰$ یا $\pm x^۲=۰,\ x=۰$

ت) به‌ازای $r=۴$، امکان‌های زیر را داریم:

$n=۱,\ a_۱=\pm ۱,\ a_۰=\pm ۲,$ یا $\pm x\pm ۲=۰,\ x=\pm ۲$

$n=۱,\ a_۱=\pm ۲,\ a_۰=\pm ۱$ یا $\pm ۲x\pm ۱=۰,\ x=\pm\frac{۱}{۲}$

$n=۱,\ a_۱=\pm ۳,\ a_۰=۰$ یا $\pm ۳x=۰,\ x=۰$

$n=۲,\ a_۲=\pm ۱,\ a_۱=۰,\ a_۰=\pm ۱$

یا $x^2 \pm 1 = 0$ ، $x = \pm 1$ ، $\pm i$

$n = 2$ ، $a_2 = \pm 1$ ، $a_1 = \pm 1$ ، $a_0 = 0$

یا $\pm x^2 \pm x = 0$ ، $x = 0$ ، ± 1

یا $\pm 2x^2 = 0$ ، $x = 0$ $\qquad$ $n = 2$ ، $a_2 = \pm 2$ ، $a_1 = a_0 = 0$

یا $\pm x^3 = 0$ ، $x = 0$ $\qquad$ $n = 3$ ، $a_3 = \pm 1$ ، $a_2 = a_1 = a_0 = 0$

و به‌همین ترتیب تا آخر.

با رعایت قاعده‌هایی‌که قبلاً گفتیم، رشتهٔ عددهای جبری به‌دست می‌آید:

$$A = \{0, -1, +1, -2, +2, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -i, +i, \ldots\}$$

به‌هر عضو این رشته، یك رتبهٔ کاملاً مشخص نظیر است و از آنجا قضیهٔ بند ۳ نتیجه می‌شود.

۳. مجموعهٔ عددهای جبری شمارا است

حالا دیگر می‌توان گفت که مجموعه‌های P، I، U، N، Z، Q و A، که تا اینجا مورد بررسی قرار گرفته‌اند، همگی مجموعه‌ای شمارا هستند. درحالی‌که این مجموعه‌ها، درعمل تفاوت بسیاری باهم دارند، و به‌خصوص P، I و U، زیر مجموعه‌های‌محضی از N هستند، N هم زیر مجموعهٔ محضی از Z است که خود زیر مجموعهٔ محضی از Q می‌باشد.

آیا همهٔ مجموعه‌های نامتناهی، مجموعه‌هایی شمارا هستند؟ مسلماً نه! ما در بخش بعد، با مجموعه‌هایی برخورد خواهیم کرد که دیگر شمارا نیستند. به‌خصوص ثابت خواهیم کرد که مجموعهٔ هم‌توان نقطه‌ها، که در این‌بخش دیدیم (مجموعهٔ نقطه‌های یك‌خط، یك‌دایره)، دارای قوتی بزرگتر از قوت شمارا می‌باشد.

تمرین

۱. رشتهٔ مرتب عددهای جبری، جواب‌های معادلهٔ جبری رتبهٔ ۵ راتشکیل دهید.

۲. آیا $sin ۷/۵^{\circ}$، یك عدد غیر جبری است یا یك عدد جبری؟

۳. آیا مجموعهٔ عددهای موهومی خالص، مجموعه‌ای شمارا است؟

۴. آیا ریشهٔ معادلهٔ $x-\pi=۰$، یك عدد جبری است؟

۵. آیا مجموعهٔ عددهای جبری حقیقی، شمارا است؟

IV. مجموعه‌های نا شمارا

§ ۱۲. قوت متصله

۱. مجموعهٔ عددهای حقیقی بین ۰ و ۱

$$R_۱=\{x|x\in R \wedge ۰<x<۱\}$$

به‌هر عضو از $R_۱$، یك عدد دهدهی بی‌پایان را نظیر می‌کنیم. درحالتی هم که سروکار ما با یك عدد دهدهی محدود باشد، یعنی رقم‌های دهدهی آن از جایی به‌بعد برابر صفر شود، از عدد دهدهی بی‌پایان معادل آن استفاده می‌کنیم. به‌این‌ترتیب، مثلاً

$$\frac{۱}{۲}=۰/۴۹۹\ ۹۹۹\ \ldots \qquad \sqrt{\frac{۱}{۵۰}}=۰/۱۴۱\ ۴۲۱\ \ldots$$

$$\frac{۵}{۱۲}=۰/۴۱۶\ ۶۶۶\ \ldots \qquad \frac{\pi}{۶}=۰/۵۲۳\ ۵۹۸\ \ldots$$

$$\sin ۴^{\circ}=۰/۰۶۹\ ۷۵۶\ \ldots \qquad \log ۱/۰۹=۰/۰۳۷\ ۴۲۶\ \ldots$$

۲. ناشمارا بودن مجموعهٔ $R_۱$

اگر $R_۱$ شمارا باشد، باید بتوانیم عضوهای‌آن را در یك‌رشته،

به‌ترتیب صعودی مرتب کنیم، مثلاً

$۱)\ ۰/c_{۱۱}\, c_{۱۲}\, c_{۱۳}\, c_{۱۴} \ldots$

$۲)\ ۰/c_{۲۱}\, c_{۲۲}\, c_{۲۳}\, c_{۲۴} \ldots$

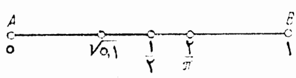
$۳)\ ۰/c_{۳۱}\, c_{۳۲}\, c_{۳۳}\, c_{۳۴} \ldots$

$۴) \ldots\ldots\ldots\ldots$

که در آن، C_{ij} ها، رقم‌هائی از مجموعهٔ $\{۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹\}$ می‌باشند. حالا عددی مثل $r = ۰/a_۱\, a_۲\, a_۳ \ldots$ را تشکیل می‌دهیم، به‌قسمی که به‌ازای هر i داشته باشیم: $a_i \neq c_{ii}$ و $a_i \neq ۰$ و $a_i \in \{۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹\}$. هر عدد $r_۱$، که به‌این ترتیب تشکیل‌شود، با همهٔ عددهای رشتهٔ قبلی فرق دارد، زیرا اگر n_i یك عضو دلخواه از رشته باشد، داریم: $c_{ii} \neq a_i$ و درنتیجه $n_i \neq r_۱$. این گزاره را ـ که اثبات شد ـ اینطور هم می‌توان بیان کرد: هیچ رشتهٔ شمارای عددهای حقیقی از فاصلهٔ $۱ > r > ۰$، نمی‌تواند شامل همهٔ عددهای حقیقی‌موجود دراین فاصله باشد.

مجموعهٔ عددهای حقیقی واقع بین ۰ و ۱، شمارا نیست.

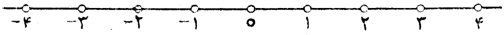
۳. نگاشت مجموعهٔ $R_۱$ به‌روی مجموعهٔ نقطه‌های یك‌پاره خط (باز).



شکل ۲۳. تناظر عددهای $۱ > r > ۰$،
با نقطه‌های پاره خط AB

شکل ۲۳ نشان می‌دهد که چگونه می‌توان عضوهای مجموعهٔ $R_۱$ را، روی پاره خطی به‌درازای ۱ (بدون درنظر گرفتن دو انتهای آن)، نگاشت.

۴. خط عددی

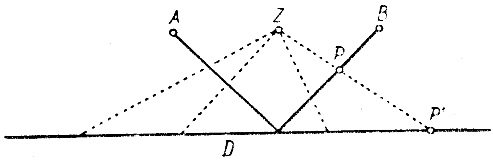


شکل ۲۴. خط عددی (هم‌توانی مجموعهٔ عددهای حقیقی و نقطه‌های یک خط)

می‌توان یک تناظر دوسوئی بین مجموعهٔ عددهای حقیقی r ($-\infty < r < +\infty$) و مجموعهٔ نقطه‌های یک خط، موسوم به‌خط عددی یا خط عددهای حقیقی برقرار کرد (شکل ۲۴).

۵. مجموعه‌های $R_۱$ و R هم‌توان هستند

با تصویر کردن مجموعهٔ نقطه‌های یک پاره خط شکسته به‌طول ۱، روی مجموعهٔ نقطه‌های یک خط (شکل ۲۵)، ثابت می‌شود که این دو مجموعه هم‌توان هستند. از این گزاره، و از نتیجه‌های بندهای



شکل ۲۵. مجموعهٔ نقطه‌های پاره خط شکستهٔAB، با مجموعهٔ نقطه‌های خط D، هم‌توان است

۳ و ۴ برمی‌آید که مجموعهٔ $R_۱$ با مجموعهٔ R هم‌توان است وبنابراین **مجموعهٔ عددهای حقیقی ناشمارا است.**

می‌گویند که مجموعهٔ عددهای حقیقی واقع‌بین ۰ و ۱، دارای **قوت متصله** است.

اکنون ما دو عدد اصلی ترانسفینی را می‌شناسیم. ولی اهمیت این مفهوم وقتی روشن می‌شود که متوجه شویم، به‌جز قوت شمارا

و قوت متصله، بی‌نهایت عدد اصلی ترانسفینی وجود دارد که به‌ما امکان می‌دهد تا «بی‌نهایت‌ها» را در یك رشتهٔ واقعی، مرتب کنیم. عجالتاً به‌بررسی نمونه‌های دیگری از قوت متصله می‌پردازیم.

۶. مجموعه‌های دارای قوت متصله

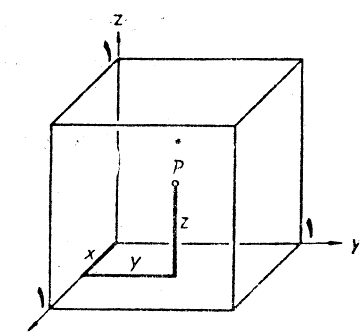
مجموعهٔ نقطه‌های یك مربع، مجموعهٔ نقطه‌های یك صفحه، مجموعهٔ نقطه‌های یك مکعب و به‌طور کلی، مجموعهٔ نقطه‌های یك فضای سه بعدی را درنظر می‌گیریم، این مجموعه‌ها، هم‌توان هستند و همهٔ آنها دارای قوت متصله می‌باشند.

مکعبی به‌ضلع واحد و یك نقطهٔ P از این مکعب را، به‌مختصات x، y و z در نظر می‌گیریم. در بند ۱.۱۲ دیدیم که عددهای x، y و z را تنها به‌یك طریق می‌توان به‌شکل یك عدد دهدهی بی‌پایان نشان‌داد، مثلاً

$$x = ۰/a_۱\, a_۲\, a_۳ \ldots$$
$$y = ۰/b_۱\, b_۲\, b_۳ \ldots$$
$$z = ۰/c_۱\, c_۲\, c_۳ \ldots$$

عدد دهدهی بی‌پایان $d = ۰/a_۱\; b_۱\; c_۱\; a_۲\; b_۲\; c_۲\; a_۳ \ldots$ را، متناظر به‌این سه عدد می‌گیریم. به‌این ترتیب ثابت می‌شود که نگاشتی از مجموعهٔ C، نقطه‌های مکعب، به توی مجموعهٔ R وجود دارد، یعنی C، حداکثر دارای قوت متصله است.

از طرف دیگر می‌دانیم که مجموعهٔ نقطه‌های یك یال مکعب (پاره خط به‌طول ۱)، دارای قوت



شکل ۲۶. مجموعهٔ نقطه‌های یك مکعب

متصله است. نقطه‌های یك یال، زیر مجموعهٔ محضی از مجموعهٔ C، حداقل دارای قوت متصله است.

از این دو حکم نتیجه می‌شودکه مجموعهٔ C، قطعاً دارای‌قوت متصله است. به‌همین ترتیب می‌توان ثابت‌کردکه مجموعهٔ نقطه‌های‌یك سطح یا یك حجم غیر مشخص، دارای قوت متصله است.

یادداشت. وقتی که بین نقطه‌های P از مکعب، و عددهای حقیقی R_1، رابطهٔ دوسوئی برقرار می‌کنیم، باید به‌هر ۰ از رقم‌های a_i، b_i، c_i، یك ۰ همراه با رقم بعدی آن را، نظیرکنیم.

چند مثال:

الف) $$\left.\begin{array}{l} x=0/505\ 05\ \ldots \\ y=0/700\ 7007\ \ldots \\ z=0/933\ 333\ \ldots \end{array}\right\} P\Rightarrow d=0/579\ 050\ 073\ 050\ 073\ \ldots$$

ب) $$d=0/321\ 020\ 020\ 02\ \ldots \Rightarrow P\left\{\begin{array}{l} x=0/302\ 002\ 002\ \ldots \\ y=0/200\ 200\ 2\ \ldots \\ z=0/100\ 200\ 2\ \ldots \end{array}\right.$$

مثال مخالف. اگر صفر هم به برابری سایر رقم‌ها در نظر گرفته می‌شد، می‌داشتیم:

$$d_1=0/111\ 110\ 110\ 110\ \ldots \Rightarrow P_1\left\{\begin{array}{l} x_1=0/111\ 11\ \ldots \\ y_1=0/111\ 11\ \ldots \\ z_1=0/100\ 00\ \ldots \end{array}\right.$$

$$d_2=0/110\ 119\ 119\ 119\ \ldots \Rightarrow P_2\left\{\begin{array}{l} x_2=0/111\ 11\ \ldots \\ y_2=0/111\ 11\ \ldots \\ z_2=0/099\ 99\ \ldots \end{array}\right.$$

ولی $P_2=P_1$، درحالی‌که $d_1\neq d_2$.

۷. قوت و بعد

در بند ۴.۹ دیدیم که مجموعهٔ نقطه‌های به‌مختصات درست صفحه، می‌تواند به‌روی مجموعهٔ نقطه‌های به‌مختصات درست یك خط، نگاشته شود، و که این دو مجموعه دارای قوت‌های شمارا هستند. همچنین در بند قبل ثابت کردیم که مجموعهٔ نقطه‌های یك خم، یك سطح، یك حجم، قوتی برابر دارند و دارای قوت متصله هستند.

آیا دو مفهوم قوت و بعد، مفهوم‌هایی مستقل‌اند و به‌هم ربطی ندارند؟

تلاش‌های بسیاری از طرف په‌آنو، هیلبرت، براور به‌عمل آمد تا حکم زیر ثابت شد.

بین دو مجموعه‌ای که دارای قوت متصله و بعدهای مختلف باشند، نمی‌توان یك نگاشت‌دوسوئی پیوسته برقرار کرد، یعنی‌نمی‌توان نقطه‌های‌همسایهٔ یك‌مجموعه را، به‌نقطه‌های‌همسایهٔ‌مجموعهٔ دوم‌نظیر کرد.

۸. نگاشت‌هایی که به‌وسیلهٔ تابع تعریف شده‌اند

می‌توان مجموعهٔ R_1 را روی مجموعهٔ عددهای مثبت، به‌وسیلهٔ تابع‌های $y=\frac{x}{1-x}$، $y=tg\frac{\pi}{2}x$ و $y=\frac{x^2}{1-x^2}$، نگاشت.

۹. خلاصه

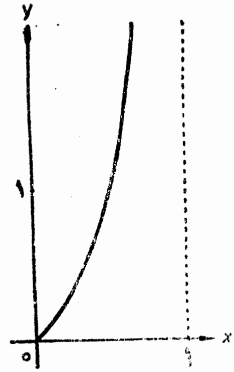
ببینیم مجموعه‌های نامتناهی، که تا اینجا مورد بررسی قرار گرفته‌اند، کدامند:

الف) مجموعه‌های شمارا

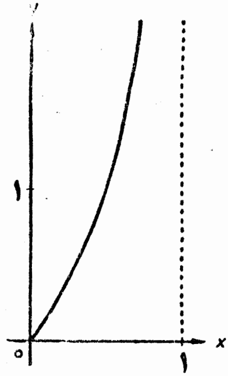
مجموعهٔ عددهای درست طبیعی: $N=\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

عددهای مثبت‌زوج: $P=\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

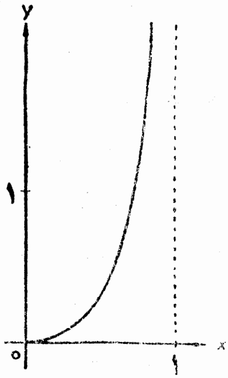
عددهای مثبت فرد: $I=\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$



شکل ۲۷. نمودار تابع $y=\frac{x}{۱-x}$



شکل ۲۸. نمودار تابع $y=tg\frac{\pi}{۲}x$



شکل ۲۹. نمودار تابع $y=\frac{x^۲}{۱-x^۲}$

عددهای اول: $U=\{۲، ۳، ۵، ۷، \ldots\}$

مجذور عددهای درست: $N^۲=\{۱، ۴، ۹، ۲۵، \ldots\}$

عددهای درست: $Z=\{۰، ۱، -۱، ۲، -۲، \ldots\}$

عددهای گویا: $Q=\{۰، ۱، -۱، \frac{۱}{۲}، -\frac{۱}{۲}، \ldots\}$

عددهای جبری: $A=\{۰، -۱، ۱، -۲، ۲، \ldots\}$

نقطه‌های به‌مختصات درست یك خط: P_D

نقطه‌های به‌مختصات درست یك صفحه: P_p

برای این مجموعه‌ها، رابطه‌های زیر را داریم:

$P\subset N$، $I\subset N$، $U\subset N$، $N^۲\subset N$،

$N\subset Z$،

$Z\subset Q$،

$Q\subset A$

و در عین‌حال، همهٔ آنها، هم‌توان هستند:

$\operatorname{card} P=\operatorname{card} I=\operatorname{card} U=\operatorname{card} N^۲=\operatorname{card} N=\operatorname{card} Z=$

$= \text{card } Q = \text{card } A$

ب) مجموعه‌های با قوت متصله:

مجموعهٔ عددهای حقیقی $0 < r < 1$: R_1

عددهای حقیقی: R

نقطه‌های پاره خط AB: P_{AB}

نقطه‌های نیم خط OX: P_{OX}

نقطه‌های یك خط D: P_D

نقطه‌های یك مكعب به‌ضلع واحد: P_C

برای این‌مجموعه‌ها، رابطه $R_1 \subset R$ برقرار است وضمناً داریم:

$$\text{cacd } R_1 = \text{card } R = \text{card } P_{AB} = \text{card } P_{OX} = \text{card } P_D =$$
$$= \text{card } P_C$$

یادآوری علامت‌ها و قراردادها:

مجموعه‌ها با حرف‌های بزرگ نموده می‌شوند.

درگزاره‌های کلی، مجموعه‌ها را با نشانه‌های E، F و G می‌نویسند، مثلاً

$$E \sim F \wedge F \sim G \Rightarrow E \sim G$$

عضوهای مجموعه‌های خاص را، داخل دو ابرو می‌گذارند:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \qquad B = \{x | x^2 - 4 = 0\}$$

در یك بحث معین، برای اینکه اشتباهی پیش نیاید، هر مجموعه را در تمامی بحث، با یك نشانه مشخص می‌کنند.

بعضی نشانه‌ها، در سرتا سر کتاب، برای مجموعه‌های مشخصی در نظر گرفته شده‌اند، مثل

N، برای مجموعهٔ عددهای طبیعی،

Z، برای مجموعهٔ عددهای درست،

Q، برای مجموعهٔ عددهای گویا،

R، برای مجموعهٔ عددهای حقیقی،

برای اجتناب از تکرار جمله‌های ملال‌آور، معمولاً، بدون اینکه

به‌بیان دقیق بپردازند، مـی‌نویسند: «$x \in Q$» یا «$f(x)$ روی R معین شده است» یا «هرچه باشد n از N».

۱۰. مسألهٔ پیوستگی

این مسأله که: آیا مجموعه‌هایی وجود دارد که قوتی بین‌قوت شمارا و قوت متصله داشته باشند یـا نه، تا امروز به‌طـور کامل حل نشده است.

۱۱. قضیه‌های مربوط به‌اجتماع مجموعه‌های نامتناهی

به‌اثبات سه قضیه‌ای می‌پردازیم، کـه برای موضوع‌هـای آیندهٔ این بخش، بسیار مهم‌اند.

الف) اگر به‌یك مجموعهٔ شمارا، تعدادی متناهی عضو بیفزاییم، یا از آن کم کنیم، مجموعهٔ حاصل باز هم شمارا است

اثبات. اگر $F=\{f_1, 1_2, \ldots, f_n\}$ یـك مجموعهٔ متناهـی، و $D=\{d_1, d_2, \ldots\}$ یك‌مجموعهٔ شمارا باشد، اجتماع این دومجموعه را می‌توان نوشت:

$$S=F\bigcup D=\{f_1, f_2, \ldots, f_n, d_1, d_2, \ldots\}$$

و بنابراین، مجموعه‌ای شمارا است.

از طرف دیگر، روشن است که اگر یك مجموعهٔ متناهی را، از یك مجموعهٔ شمارا کم کنیم، یك مجموعهٔ نامتناهی شمارا می‌ماند.

مثال. $N=\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ ، $U_1=\{2, 3, 5, 7\}$

$$N-U_1=\{1, 4, 6, 8, 9, 10, \ldots\}$$

ب) حاصل‌جمع شمارایی از مجموعه‌هـای شمارا، یك مجموعهٔ شمارا است.

شکل تضعیف شده‌ای از ایـن قضیه، چنین است: حـاصل جمع

متناهی، از مجموعه‌های شمارا، یك مجموعهٔ شمارا است.

اثبات این حکم در تمرین شمارهٔ ۶ داده شده است.

پ) اگر از یك مجموعهٔ نامتناهی‌به‌قوت نا مشخص، یك‌مجموعهٔ شمارا را کم‌کنیم، مجموعه‌ای به‌دست می‌آید، که اگر نامتناهی‌باشد، دارای همان قوت مجموعهٔ اولی است.

اثبات. اگر E یك مجموعهٔ نامتناهی، P زیر مجموعهٔ شمارایی از E، Q مجموعهٔ متمم P نسبت به E، R زیر مجموعه‌ای شمارا از Q و S متمم R نسبت به Q باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$Q=E-P,\ S=Q-R,\ E=P\bigcup R\bigcup S,$$

(P،R و S، دو به‌دو، از هم جدا هستند).

بنا بر قضیهٔ ب) داریم: $\text{card}(P\bigcup R)=\text{card } R$ و بنابه بازتابی رابطهٔ هم‌توانی: $\text{card } S=\text{card } S$.

از آنجا $E=(P\bigcup R)\bigcup S\sim R\bigcup S=Q$ و بالاخره $E\sim Q$.

طرح اثبات.

$$E=\begin{Bmatrix}P\\Q\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\begin{Bmatrix}P\\R\end{Bmatrix}\sim R\\ S\quad \sim S\end{Bmatrix}=Q$$

۱۲. قوت مجموعهٔ عددهای حقیقی غیر جبری[1]

بنا به‌تعریف

مجموعهٔ عددهای غیر جبری، عبارتست از متمم مجموعهٔ عددهای جبری، نسبت به‌مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی و موهومی.

مجموعهٔ عددهای حقیقی غیر جبری، دارای قوت متصله است.

اثبات. بنا بر قضیهٔ سوم بند پیش، اگر از مجموعهٔ عددهای

---

۱. عددهای غیر جبری را، عددهای متعالی یا ترانساندان هم می‌گویند.

حقیقی، مجموعهٔ عددهای جبری را کم کنیم، مجموعه‌ای با قوت‌متصله به‌دست می‌آید.

این قضیه ثابت می‌کندکه: اولاً عددی غیر جبری وجود دارند. ثانیاً مجموعهٔ عددهای غیر جبری، مجموعه‌ای نامتناهی و دارای قوت متصله است، قوتی‌که بزرگتر از قوت مجموعهٔ عددهای جبری است. به زبان دیگر: عددهای جبری، دربین عددهای حقیقی که «به‌طورکلی غیر جبری» هستند، «استثناهایی» بیش نیستند.

با این وصف، باید توجه داشت که اثبات غیر جبری بودن یك عدد (مثل عددهای $\sqrt[2]{2}$، e، π، $\ln 2$، $\sin 1^\circ$)، یعنی اثبات اینکه این عدد نمی‌تواند ریشهٔ یك معادلهٔ جبری باشد، همواره دشوار، و اغلب ناممکن است.

تمرین

۱. قوت نقطه‌های یك مستطیل به بعدهای ۱ و ۲ را معین کنید.

۲. قوت مجموعهٔ عددهای مختلط را پیدا کنید.

۳. قوت مجموعهٔ عددهای جبری گنگ را تعیین کنید.

۴. آیا هر مجموعهٔ نامتناهی، دارای زیر مجموعه‌های شمارا می‌باشد؟

۵. با روش قطرها، قوت مجموعهٔ عددهای به‌شکل m^n را، که درآن m و n عددهای طبیعی هستند، پیدا کنید.

۶. قضیهٔ ب) بند ۱۱ را ثابت کنید.

راهنمایی. روش قطرها را، برای یك مقدار شمارای مجموعه، به‌کار ببرید.

۷. قوت مجموعهٔ X را معین کنید:

$$X=\{x|x=\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}\wedge a, b, c\in N\}$$

۸. قوت مجموعهٔ X را معلوم کنید:

$$X=\left\{x|x=\frac{a+b\sqrt{5}}{c+d\sqrt{5}}\wedge a, b, c, d\in Q\right\}$$

۹. الف) هم‌توانی مجموعه‌های X و Y را ثابت کنید:

$$X = \{x | x \in R \wedge 0 < x < 1\};$$
$$Y = \{y | y \in R \wedge 0 < y < 1\}$$

ب) یك نگاشت دوسوئی از X روی Y را پیدا کنید.

۱۰. قوت این مجموعه‌ها را معلوم کنید:

الف) $$X = \left\{\frac{x+1}{x-1} < 1 \wedge x \in R\right\}$$

ب) $$Y = \{y | \sin y = \cos y \wedge y \in R\}$$

§۱۳. قوت‌های بزرگتر از قوت متصله

۱. قوت تابعی

الف) تااینجا با دو درجهٔ نامتناهی، با دوعدد اصلی ترانسفینی، برخورد کرده‌ایم: قوت شمارا و قوت متصله. حالا به‌بررسی امکان وجود قوت‌های دیگر می‌پردازیم.

مجموعهٔ تابع‌های حقیقی، با حوزهٔ تعریف $1 > x > 0$، را درنظر می‌گیریم. ابتدا بعضی مفهوم‌های کلی مربوط به‌تابع‌ها را یادآور می‌شویم. به‌هر مقدار متغیر، از مجموعهٔ عزیمت $1 > x > 0$، یك مقدار و تنها یك مقدار تابع، با علامت $y = f(x)$، متناظر است. برعکس، به‌مقدارهای مختلف متغیر، ممکن است یك مقدار تابع نظیر شود. یك تابع را می‌توان با دادن یك معادله، یك نمودار و یا یك قانون تناظر دلخواه دیگر، تعریف کرد.

دراین بخش، وارد محدودیت‌های خاص ناشی از پیوستگی یا مشتق پذیری تابع‌های مورد نظر و غیرآن، نخواهیم شد.

دو تابع را مختلف می‌نامیم، اگر دست‌کم به‌ازای یك مقدار

متغیر، دو مقدار متمایز برای این دو تابع به‌دست آید.

هر عضو از مجموعهٔ تابع‌های با حوزهٔ تعریف $0 < x < 1$، یك تابع است.

مجموعهٔ K_1، از تابع‌های ثابت روی فاصلهٔ $0 < x < 1$، $y = f(x) = c$، دارای قوت متصله است، زیرا c می‌تواند همهٔ مقادیر واقع بین $-\infty$ و $+\infty$ را اختیار کند، واین امر یك تناظر دوسوئی بین مجموعهٔ K_1 و مجموعهٔ R حقیقی‌ها، برقرار می‌کند. مجموعهٔ F_1، تابع‌های با حوزهٔ تعریف $0 < x < 1$، اکیداً شامل مجموعهٔ K_1 است که در اینجا تعریف کردیم، بنابراین، مجموعهٔ F_1 دست‌کم با قوت متصله است.

ب) می‌گویند که مجموعهٔ F_1، با حوزهٔ تعریف $0 < x < 1$، دارای قوت تابعی است. ثابت می‌کنیم که قوت تابعی اکیداً بزرگتر از قوت متصله است.

برای اثبات، از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که F_1 دارای قوت متصله باشد. دراین‌صورت، F_1 با مجموعهٔ R_1، عدد-های حقیقی واقع بین ۰ و ۱، هم‌توان می‌شود، و می‌توانیم یك نگاشت دوسوئی از R_1 روی F_1 پیدا کنیم. $f_r(x)$ را تابع نظیر r از R_1 دراین نگاشت، و $\varphi(x)$ را تابعی با حوزهٔ تعریف $0 < x < 1$ می‌گیریم، به نحوی که به‌ازای هر r (با شرط $0 < r < 1$)، داشته باشیم: $\varphi(r) \neq f_r(r)$. تابع $\varphi(x)$ با هیچکدام از تابع‌های $f_r(x)$ برابر نیست، زیرا دست‌کم به‌ازای $x = r$ داریم: $f_r(x) \neq \varphi(x)$. بنابراین، $\varphi(x)$ عضوی از مجموعهٔ تابع‌های هم‌توان R_1 ـ که بنا به‌فرض شامل همهٔ تابع‌های F_1 می‌شد ـ نیست. به‌این‌ترتیب، فرض «F_1 دارای قوت متصله است»، نادرست ازآب درمی‌آید.

قوت مجموعهٔ تابع‌های با حوزهٔ تعریف $0 < x < 1$، از قوت متصله،

بزرگتر است.

پ) لم قبل را اینطور هم می‌توان بیان کرد: هیچ زیر مجموعهٔ F_c از F_1، که دارای قوت متصله باشد، نمی‌تواند F_1 را به‌تمامی شامل باشد، برای هر زیرمجموعهٔ F_c از F_1 نیز می‌توان یك تابع $f_r(x)$ را که مشمول F_c نیست، نظیر کرد.

مثال. به‌هر عضو r، تابع $f_r(x)=\frac{x}{r}$، را نظیر می‌کنیم. مجموعهٔ F_c این تابع‌ها، زیرمجموعه‌ای از F_1 و دارای قوت متصله است.

به‌مقدار $r=\frac{۱}{۴}$، تابع $y=۴x$ و به $r=\frac{۱}{۲}$، تابع $y=۲x$ نظیر است.

تابع $\varphi(x)$ را با رابطهٔ $\varphi(r)=F_r(r)+۱$ تعریف می‌کنیم، درنتیجه $\varphi(r)=۱+۱=۲$.

بلافاصله دیده می‌شود که $\varphi(x)=۱$، به F_c تعلق ندارد.

ت) درقسمت الف) ثابت کردیم که مجموعهٔ تابع‌های ثابت، دارای قوت متصله است. از هم‌اکنون خاطرنشان کنیم که مجموعهٔ تابع‌های پیوسته هم دارای همان قوت است، درحالی‌که مجموعهٔ تابع‌های تعریف‌شده، دارای قوت تابعی است. بنابراین، تابع‌های پیوسته دربین همهٔ تابع‌های با حوزهٔ تعریف $۰<x<۱$، «استثناهائی» بیش نیستند.

شگفتی‌آور نیست اگر بگوییم که مجموعهٔ تابع‌های مشتق‌پذیر نیز دارای قوت متصله است، درصورتی‌که مجموعهٔ تابع‌های انتگرال‌پذیر، دارای قوت تابعی است. بنابراین، تابع‌های مشتق‌پذیر هم، دربین تابع‌های انتگرال‌پذیر، «استثناهایی» بیش نیستند. خوانندهٔ ناآگاه ممکن است تصور کند که تنها تابع‌هایی انتگرال‌پذیرند که دارای یك تابع اولیه به‌شکل یك تابع جبری یا یك تابع غیر جبری مقدماتی باشد. درحالی‌که اینطور نیست! همهٔ این تابع‌ها انتگرال‌پذیرند، درحالی که عکس آن درست نیست. انتگرال‌پذیری، باید به‌مفهوم «انتگرال پذیری

به‌مفهوم ریمانی» در نظر گرفته شود. مثلاً $\frac{\sin x}{x}$، به‌معنایی که‌در اینجا مورد نظر ماست، انتگرال‌پذیر است.

یادداشت. می‌دانیم که مشتق و انتگرال یك تابع، با رابطهٔ زیر-که برای حساب دیفرانسیل و انتگرال بنیادی ومهم است ـ به‌هم مربوط‌اند. مشتق انتگرال یك تابع (پیوسته)، که به‌عنوان تابعی از حد بالائی درنظر گرفته شود، عبارتست ازهمان تابع زیر علامت انتگرال، یعنی

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

این قضیهٔ بنیادی را، ابتدا ریمان (۱۸۲۶-۱۸۶۶)، برای تابع‌های پیوسته ثابت‌کرد. بعدها، هانری له‌بگ (۱۸۷۵-۱۹۴۱)، باتوجه به‌نظریهٔ مجموعهٔ نقطه‌های کانتور، توانست مفهـوم انتگرال را چنان گسترش دهد که قضیهٔ بنیادی، بدون محدودیت مربوط به‌پیوستگی، به‌قوت خود باقی بماند. در آنالیز جدید، حتی از تابع‌های ناپیوسته هم ، دیفرانسیل گرفته می‌شود، نتیجه‌ای‌که برای فیزیك جدید، ارزش زیادی دارد.

۲. قوت مجموعهٔ زیر مجموعه‌های یك مجموعه

الف) گفته بودیم‌که به‌جز سه عدد اصلی ترانسفینی، که تااینجا بررسی کردیم، تعداد نامحدودی ازآنها وجود دارد. اثبات قضیهٔ زیر، این ادعا را تأیید می‌کند.

به‌هر مجموعهٔ نامتناهی ، مجموعه‌ای نظیر است که قوتش از قوت مجموعهٔ اصلی بزرگتر است.

به‌زبان دیگر، مجموعهٔ عددهای اصلی ترانسفینی، متناهی‌نیست و از بالا، مرزی ندارد، مثلاً مجموعهٔ $\mathscr{P}(E)$ ، زیر مجموعه‌های E، همواره دارای قوت بزرگتر از قوت E است.

برای مجموعه‌هـای متناهی، این قضیه ثـابت شده است، زیـرا

می‌دانیم که اگر E شامل n عضو باشد، یعنی $\text{card } E = n$، دراین صورت

$$\text{card } \mathscr{P}(E) = ۲^n > n$$

ب) اثبات کلی این قضیه، مثالی خوب برای استدلال‌های ریاضی است. ابتدا اثبات آن را برای یك مجموعهٔ متناهی شرح می‌دهیم.

مثال. اگر $E = \{۱،۲،۳\}$ باشد، $\mathscr{P}(E)$ شامل $۲^۳ = ۸$ عضو است که عبارتند از:

$$\mathscr{P}(E) = \Big\{ \varnothing، \{۱\}، \{۲\}، \{۳\}، \{۱،۲\}، \{۱،۳\}، \{۲،۳\}، \{۱،۲،۳\} \Big\}$$

از $\mathscr{P}(E)$، مجموعهٔ $\mathscr{A}(E)$ را هم‌توان E جدا می‌کنیم، مثلاً

$$\mathscr{A}(E) = \Big\{ \{۲\}، \{۲،۳\}، \{۱،۲،۳\} \Big\}$$

یك نگاشت دوسوئی بین E و $\mathscr{A}(E)$ را تعریف می‌کنیم. از ۶ نگاشت ممکن، آن را اختیار کرده‌ایم که با جدول زیر مشخص می‌شود:

$$۱ \longleftrightarrow \{۲،۳\}، \quad ۲ \longleftrightarrow \{۱،۲،۳\}، \quad ۳ \longleftrightarrow \{۲\}$$

به‌وسیلهٔ این نگاشت می‌توانیم عضوهای E را به‌دو طبقه تقسیم کنیم. عضوهایی‌از E را که درعضو متناظرآن در $\mathscr{A}(E)$ وجود دارد در طبقهٔ I و بقیه را در طبقهٔ II جا می‌دهیم.

اگر مجموعهٔ عضوهای طبقهٔ II را P بنامیم، در مثال بالا خواهیم داشت: $P = \{۱،۳\}$. P دررابطه‌های $P \in \mathscr{P}(E)$ (بنابه‌تعریف $\mathscr{P}(E)$) و $P \notin \mathscr{A}(E)$ (که در زیر ثابت خواهیم کرد)، صدق می‌کند.

اگر P به $\mathscr{A}(E)$ تعلق داشته‌باشد، یك عضو p از E به‌آن‌نظیر خواهد شد، و این p ناچار متعلق به یکی از دوطبقهٔ I یا II است.

اگر p، متعلق به‌طبقهٔ I باشد در P قرار می‌گیرد که بنابه‌تعریف، تنها شامل عضوهای طبقهٔ II است.

اگر p متعلق به طبقهٔ II باشد، بنابه‌تعریف طبقهٔ II، نباید عضو P

باشد، درحالی‌که P شامل همهٔ عضوهای طبقهٔ II است و بنابراین باید شامل p هم بشود.

درنتیجه، P عضوی از $\mathscr{A}(E)$ نیست. به‌زبان دیگر، هیچکدام از زیر مجموعه‌های $\mathscr{P}(E)$ - که‌هم‌توان E باشد - نمی‌تواند همهٔ‌عضوهای $\mathscr{P}(E)$ را دربر بگیرد. پس $\mathscr{P}(E)$ دارای قوتی بزرگتر از E است.

پ) این شیوهٔ اثبات، برای نظریهٔ مجموعه‌ها، شیوه‌ای کلاسیك است و بدون هیچ اشکالی، می‌تواند درمورد مجموعه‌های نامتناهی هم به‌کار رود.

E را یك‌مجموعهٔ نامتناهی و $\mathscr{P}(E)$ را مجموعهٔ زیرمجموعه‌های E می‌گیریم.

بلافاصله، رابطهٔ $\text{card } E \leqslant \text{card } \mathscr{P}(E)$ به‌دست می‌آید. $\mathscr{P}(E)$ دست‌کم دارای قوت E است، در واقع، تنها وقتی که مجموعهٔ E حتی یك عضو هم نداشته باشد، مجموعهٔ زیر مجموعه‌های E، هم‌توان E است.

پس ثابت می‌کنیم $\text{card } E < \text{card } \mathscr{P}(E)$. اگر $\mathscr{A}(E)$، مجموعه‌ای‌اززیرمجموعه‌هایEباشد که‌در رابطه‌ای $\mathscr{A}(E) \subset \mathscr{P}(E)$ و $E \sim \mathscr{A}(E)$ صدق کند، هم‌توانی $\mathscr{A}(E)$ و (E) ایجاب‌می‌کند که بین این دو مجموعه، یك نگاشت دوسوئی وجود داشته باشد. آن وقت عضوهای E را ، برحسب اینکه به‌عضوهای $\mathscr{A}(E)$ متناظر آن تعلق داشته باشد یا نه ، به «طبقهٔ I» و «طبقهٔ II» تقسیم می‌کنیم . مجموعهٔ P، همهٔ عضوهای طبقهٔ II، عضوی از $\mathscr{P}(E)$ است، ولی عضوی از $\mathscr{A}(E)$ نیست (استدلال، شبیه حالت مجموعه‌های متناهی است). به‌این ترتیب، معلوم می‌شود که‌هیچ

کدام از زیر مجموعه‌های $\mathscr{A}(E)$ از $\mathscr{P}(E)$، نمی‌تواند درعین‌حال، با هر دومجموعهٔ E و $\mathscr{P}(E)$ هم‌توان باشد، یعنی

مجموعهٔ زیر مجموعه‌های یك مجموعه، دارای قوتی بزرگتر از قوت این مجموعه است.

یکی از نتیجه‌هایی‌که از این قضیه به‌دست می‌آید، چنین است: به‌هر عدد اصلی ترانسفینی، می‌توان عدد اصلی ترانسفینی دیگری، که از آن بزرگتر است، متناظرکرد.

از آنچه گفته شد، نتیجه می‌شود که تنها نمی‌توان، مثلاً از «بی‌نهایتی بزرگتر» صحبت کرد. حالا دیگر می‌دانیم که عددهای‌اصلی ترانسفینی، خود مجموعه‌ای نامتناهی را تشکیل می‌دهند، به‌نحوی که کاملاً متمایز از یکدیگر و نسبت به‌هم قابل مقایسه‌اند. عددهای اصلی ترانسفینی، گوناگونی‌های[1] نامتناهی را، مشخص می‌کنند، درست به همان ترتیب که عددهای اصلی متناهی، گوناگونی‌های متناهی رامعین می‌کنند.

تمرین

۱. قوت مجموعهٔ خطهای به‌معادلهٔ $y=c_1x+c_2$ را، که درآن c_1 و c_2 عددهای حقیقی هستند، معین کنید.

۲. یك مجموعهٔ عددی پیدا کنید که هم‌توان بامجموعهٔ دایره‌های به‌معادلهٔ زیر باشد:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

۳. عددهای اصلی متناهی و ترانسفینی را که تا اینجا دیده‌ایم، برحسب «بزرگی» آنها، منظم کنند.

---

۱. ژرژ کانتور، برای باراول، از «نظریهٔ گوناگونی» صحبت کرده است.

۴. قوت مجموعهٔ $E=\{x^y | x، y\in R \wedge x، y > ۰\}$ را معین کنید.

۵. اگر N مجموعهٔ عددهای طبیعی $\{...، ۳، ۲، ۱\}=N$ و $\mathscr{P}(N)$ مجموعهٔ زیر مجموعه‌های N باشد:

$$\mathscr{P}(N)=\{\varnothing، \{۱\}، \{۲\}، ...، \{۱،۲\}، ...\}$$

ثابت کنید

$$\text{cara } \mathscr{P}(N) > \text{card } N$$

۱۴§. قضیهٔ هم‌توانی یا قضیهٔ کانتور ـ برنشتاین

۱. مقایسهٔ عددهای اصلی دومجموعهٔ نامتناهی

برای اثبات هم‌توانی دو مجموعه، همه‌جا می‌کوشیدیم تا یك نگاشت دوسوئی از یکی به‌روی دیگری، تعیین کنیم. اگر یك چنین نگاشتی وجود داشته باشد، می‌گوییم که مجموعه‌ها هم‌توان هستند، یا دارای یك قوت می‌باشند. دومجموعهٔ هم‌توان، با یك عدد اصلی‌مشخص می‌شوند:

$$E\sim F\Longleftrightarrow \text{card } E=\text{card } F$$

اگر در مقایسهٔ دو مجموعهٔ E و F بتوان ثابت کرد که E هم‌توان یك زیر مجموعه از F است، ولی برعکس، F با هیچ زیر مجموعه‌ای از E هم‌توان نیست، می‌گوییم که: قوت F بزرگتر ازقوت E است، یاعدداصلی F ازعدداصلی E بزرگتراست، یا $\text{card } F > \text{card } E$.

به‌خصوص ثابت کردیم که

$$\text{card } N < \text{card } R_۱ < \text{card } F_۱$$

و که

$$\text{card } E < \text{card } \mathscr{P}(E)$$

به‌طور کلی، اغلب به‌جای مقایسهٔ مستقیم دو مجموعهٔ E و F، بهتر است کوشش شود تا یك رابطهٔ دوسوئی از یکی روی زیرمجموعه‌ای از دیگری بر قرار شود. چهار حالت پیش می‌آید.

۱. E هم‌توان زیر مجموعهٔ Q از F و
F هم‌توان زیر مجموعهٔ P از E است؛

۲. E هم‌توان زیر مجموعهٔ Q از F است، ولی
F با هیچکدام از زیر مجموعه‌های P از E هم‌توان نیست ؛

۳. E هم‌توان هیچ زیر مجموعه‌ای مثل Q از E نیست، ولی
F هم‌توان زیر مجموعهٔ P از E است؛

۴. E هم‌توان هیچ زیر مجموعه‌ای مثل Q از F و
F هم‌توان هیچ زیر مجموعه‌ای مثل P از E نیست.

حالت‌های ۲ و ۳، رابطه‌های زیر رامشخص می‌کنند:

$$\text{card } E < \text{card } F \quad \text{و} \quad \text{card } F < \text{card } E$$

حالت ۴، ظاهراً عجیب است و ایجاب می‌کندکه عددهای‌اصلی card E و card F، مقایسه‌پذیر نباشند.

کانتور قبلاً گفته بود که این حالت ممکن نیست و ما هم در اینجا، به‌همین‌قول‌اکتفامی‌کنیم، وبه‌قضیهٔ زرمه‌لو (Zermelo)، دربارهٔ «متصلهٔ خوش ترتیب»، که اثبات دقیقی از این نـاممکنی را به‌دست می‌دهد، ولی از حد این‌کتاب خارج است، متوسل نمی‌شویم.

تنها حالت ۱ می‌ماند که در بندبعدی به‌آن می‌پردازیم.

۲. اثبات قضیهٔ هم‌توانی

قضیه اینطور بیان می‌شود: «اگر مجموعهٔ E هم‌توان زیر مجموعهٔ Q از مجموعهٔ F، و برعکس، مجموعهٔ F هم‌توان زیر مجموعهٔ P از E باشد، در

این صورت، E و F هم‌توان هستند.

فرض‌ها چنین‌اند: $E \sim Q$ و $F \sim P$

که در آنها: $Q \subset F$ و $P \subset E$

و حکم: $E \sim F$

اثبات. کافی است ثابت کنیم که $P \sim E$. چون رابطهٔ هم‌توانی بازتاب و متعدی است، بنابراین از رابطه‌های $P \sim E$ و $F \sim P$، نتیجه خواهد شد که $E \sim F$.

متمم Q نسبت به F را R و زیر مجموعه‌ای از P را، که هم‌توان Q باشد، S و زیر مجموعهٔ متمم S نسبت به P را T می‌نامیم و داریم: $S \sim Q$.

از رابطه‌های $S \sim Q$ و $Q \sim E$ نتیجه می‌شود:

$$S \sim E \qquad (۱)$$

از طرف دیگر

$$S \subset P \subset E \qquad (۲)$$

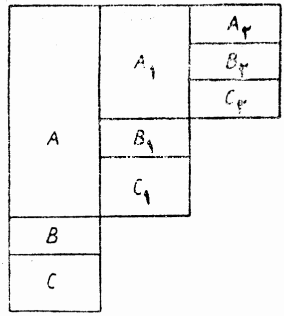
بنابراین، قضیهٔ هم‌توانی وقتی ثابت می‌شود که از دو رابطهٔ اخیر بتوان نتیجه گرفت: $P \sim E$.

این شرط را به‌صورت یك لم بیان می‌کنیم. اگر مجموعهٔ E، هم‌توان S، یکی از زیر مجموعه‌های خودش باشد، این مجموعه هم‌توان همهٔ زیرمجموعه‌های P از E، واقع بین E و S، نیز خواهد بود، به‌قسمی که شمول دوگانهٔ $S \subset P \subset E$ تحقق یابد.

ما به‌شمول‌های اکید اکتفا خواهیم کرد، چون اگر $E = P = S$ باشد، لم به‌طریق روشنی اثبات شده است.

برای سادگی کار، علامت‌ها را عوض می‌کنیم و فرض می‌کنیم: $S = A$، $P - S = B$، $E - P = C$، در اینصورت مجموعه‌های E، P، S نوشته می‌شوند: $E = A \cup B \cup C$، $P = A \cup B$ و $S = A$. فرض‌ها

عبارتند از: $A\sim A\cup B\cup C$ و $A\subset A\cup B\subset A\cup B\cup C$، وحکم: $A\cup B\sim A\cup B\cup C$.



شکل ۳۰. برای اثبات قضیهٔ هم‌توانی

بنابر (۱)، یک نگاشت دوسوئی از $A\cup B\cup C$ به‌روی A وجود دارد. این نگاشت، مجموعه‌های A، B، C را ـ همان‌طور که در شکل ۳۰ دیده می‌شود ـ به‌زیر مجموعه‌های A_1، B_1 و C_1 از A بدل می‌سازد. همین نگاشت اجازه می‌دهد که A روی A_1 نگاشته شود وزیرمجموعه‌های A_1، B_1، C_1 از A را به‌زیر مجموعه‌های A_2، B_2، C_2 از A_1 تبدیل کنیم وهمچنین تا آخر.

رشته‌ای ازمجموعه‌های A_i، B_i، C_i به‌دست می‌آید، به‌نحوی که

$$A_i=A_{i+1}\cup B_{i+1}\cup C_{i+1}$$

و

$$A\sim A_1\sim A_2\sim\ldots\sim A_i\ldots$$
$$B\sim B_1\sim B_2\sim\ldots\sim B_i\ldots$$
$$C\sim C_1\sim C_2\sim\ldots\sim C_i\ldots$$

و به‌قسمی که به‌ازای یك اندیس i، مجموعه‌های A_i، B_i، C_i، دوبه‌دو جدا از هم باشند. فرض می‌کنیم

$$\bigcap_{j\in N} A_j=A_1\cap A_2\cap A_3\ldots$$

(رشتهٔ A_i نامتناهی است وفصل مشترك همهٔ عضوهای آن، احیاناً ممکن است تهی باشد).

حالا به‌کمك شکل می‌توان رابطه‌های زیر را ثابت کرد:

$$A \cup B \cup C = (\bigcap_{j \in N} A_j) \cup B \cup C \cup B_1 \cup C_1 \cup B_2 \ldots$$

$$A \cup B = (\bigcap_{j \in N} A_j) \cup B \cup C_1 \cup B_1 \cup C_2 \cup B_2 \ldots$$

همهٔ مجموعه‌های یکی از دو رشته، دو به‌دو جدا از هم هستند. به‌جزآن، دومجموعه، که در دو رشته دارای یك‌ردیف هستند، هم‌توان می‌باشند. از آنجا نتیجه می‌شود $A \cup B \cup C \sim A \cup B$ و $P \sim E$، و این اثبات قضیهٔ هم‌توانی است. این قضیه، از برنشتاین، یکی از شاگردان کانتور است و آن را «قضیهٔ کانتور ـ برنشتاین» گویند.

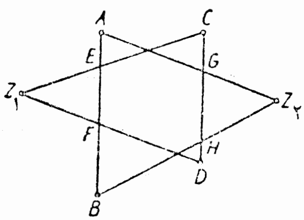
۳. رابطهٔ ترتیب بین عددهای اصلی

بین حالت‌های بند ۱، تنها سه تای اولی تحقق پذیرند که عبارتند از:

حالت ۱: $\text{card } E = \text{card } F$

حالت ۲: $\text{card } E < \text{card } F$

حالت ۳: $\text{card } E > \text{card } F$



شکل ۳۱. کاربرد قضیهٔ هم‌توانی در مجموعهٔ نقطه‌ها

از اینجا نتیجه می‌شود که دو عدد اصلی را همیشه می‌توان مقایسه کرد و دریکی، و تنهایکی از رابطه‌های فوق صدق می‌کنند.

بعلاوه اگر E با زیرمجموعه‌ای از F هم‌توان باشد، می‌توان گفت که قوت E کمتر یا برابر قوت F است یا

$$\text{card } E \leqslant \text{card } F$$

تمرین

۱. آیا حالت شمارهٔ ۴، که برای مجموعه‌های نامتناهی عملی نیست، برای مجموعه‌های متناهی تحقق پذیر است؟ درچه حالتی؟

۲. ازقضیهٔ هم‌توانی برای‌اثبات هم‌توانی مجموعه‌های $I=\{۱،۳،۵،...\}$ و $P=\{۲،۴،۶،...\}$ استفاده کنید. زیر مجموعه‌های J از I و Q از P را معین کنید که در رابطه‌های $J\sim P$ و $I\sim Q$ صدق کنند.

۳. به‌یاری شکل ۳۱ و قضیهٔ هم‌توانی، نشان دهیدکه مجموعهٔ نقطه‌های پاره خط A B، با مجموعهٔ نقطه‌های پاره خط C D هم‌توان است.

۷. عمل روی عددهای اصلی

§۱۵. جمع عددهای اصلی

۱. عمل روی عددهای اصلی متناهی

دیدیم که مجموعهٔ عددهای اصلی، مجموعه‌ای نامتناهی است و یك رابطهٔ ترتیب هم، برای این‌مجموعه در نظر گرفتیم. حالا می‌خواهیم بعضی قاعده‌های حساب عددهای اصلی را ثابت کنیم.

برای عددهای اصلی متناهی ــ که چیزی‌جز همان عددهای‌درست طبیعی نیستند ــ عمل‌هایی می‌شناسیم که در واقع، متعلق به‌همان‌حساب مقدماتی هستند:

جا به‌جائی: $a+b=b+a$، $a.b=b.a$

شرکت پذیری:

$a+(b+c)=(a+b)+c$، $a.(b.c)=(a.b).c$

پخشی: $(a+b).c=a.c+b.c$، $a.(b+c)=a.b+a.c$

حالا کوشش می‌کنیم که همین قاعده‌ها را، برای عددهای اصلی ترانسفینی، دست‌کم برای «سه‌تای اولی» ثابت کنیم. این سه‌عدد اصلی

ترانسفینی عبارتند از: قوت شمارا، قوت متصله و قوت تابعی. البته هنوز نمی‌دانیم که آیا اینها واقعاً سه‌تای اولی هستند (مسألهٔ پیوستگی)؟

از این به بعد، منظور ما از «عدد اصلی»، یك «عدد اصلی ترانسفینی» است. عدد اصلی را با card E نشان می‌دهیم که در آن E، یك مجموعهٔ دلخواه است.

۲. جمع دو عدد اصلی ترانسفینی

جمع دو عدد اصلی ترانسفینی، براساس اجتماع مجموعه‌های نظیر آنها، تعریف می‌شود. E و F را دو مجموعهٔ جدا از هم می‌گیریم (اگر مجموعه‌های E و F جدا از هم نباشند، می‌توان مجموعه‌های $\bar{E}$ و $\bar{F}$ را که جدا از هم هستند و به‌ترتیب با E و F هم‌توان‌اند، به‌جای آنها گرفت). یادآوری می‌کنیم که $\bar{E}\bigcup\bar{F}$، اجتماع دو مجموعه، عبارتست ازمجموعهٔ عضوهایی که، دست‌کم متعلق به یکی از دومجموعه باشند.

مجموع عددهای اصلی دو مجموعه، عبارتست از عدد اصلی اجتماع این دو مجموعه، به‌شرطی که جدا از هم فرض شوند:

$$\text{card } E+\text{card } F=\text{card}(\bar{E}\bigcup\bar{F})$$

از خاصیت‌های جا به‌جایی و شرکت‌پذیری اجتماع دومجموعه، نتیجه می‌شود که مجموع دو عدد اصلی هم، دارای این دو خاصیت هستند:

$$\text{card } E+\text{card } F=\text{card } F+\text{card } E$$

$$\text{card } E+(\text{card } F+\text{card } G)=(\text{card } E+\text{card } F)+$$
$$+\text{card } G$$

از قضیه‌هایی که در بخش قبل ثابت کردیم، می‌توان رابطه‌های زیر را دربارهٔ قوت‌های شمارا و متصله نتیجه گرفت. $\text{card } N=\alpha$ می‌گیریم، داریم:

$$\alpha+n=\alpha \qquad (n\in N)$$
$$\alpha+\alpha=\alpha$$
$$\alpha+\alpha+\alpha=\alpha$$

یعنی $\text{card } I+\text{card } P=\text{card } N=\alpha$

اگر $\text{card } R_1=\gamma$، قوت پیوسته باشد، داریم:

$$\gamma+n=\gamma \qquad (n\in N)$$
$$\gamma+\alpha=\gamma$$
$$\gamma+\gamma=\gamma$$
$$\gamma+n+\alpha+\gamma=\gamma+\alpha+\gamma=\gamma+\gamma=\gamma$$

مثال. $X=\{x|0<x\leqslant 1 \wedge x\in R\}$

$$Y=\{y|1<y<2 \wedge y\in R\}$$
$$\text{card } X=\text{card } R_1=\gamma, \quad \text{card } Y=\text{card } R_1=\gamma$$
$\text{card } R_1=\text{card } X+\text{card } Y$ یا $\gamma+\gamma=\gamma$

توجه کنیم که قاعده‌های جمع عددهای اصلی ترانسفینی، با قاعده‌های جمع عددهای اصلی متناهی تفاوت دارند.

بدون اثبات می‌پذیریم که اگر داشته باشیم: $\text{card } E>\text{card } N$، داریم:

$$\text{card } E+\text{card } E=\text{card } E; \ \text{card } E+\text{card } N+n=$$
$$=\text{card } E$$

۳. وجود یک عمل عکس

با چند مثال نشان می‌دهیم که برای تعریف تفریق عددهای اصلی ترانسفینی به‌تناقض برخورد می‌کنیم.

فرض می‌کنیم که تفریق عددهای اصلی، با رابطهٔ

$$\text{card } E-\text{card } F=\text{card}(E-F)$$

تعریف‌شود (که درآنجا E و F دومجموعه باشند، به‌نحوی‌که $F\subset E$).

درآنصورت:

به‌ازای $N=\{۱، ۲، ۳، \dots\}$، $N-N=\varnothing$، نتیجه می‌شود

$$\operatorname{card} N-\operatorname{card} N=۰$$

به‌ازای $N_۱=\{۲، ۳، ۴، \dots\}$، $N-N_۱=\{۱\}$، نتیجه‌می‌شود.

$$\operatorname{card} N-\operatorname{card} N=۱$$

بـه‌ازای $N_۲=\{۳، ۴، ۵، \dots\}$، $N-N_۲=\{۱،۲\}$، نتیجـه می‌شود

$$\operatorname{card} N-\operatorname{card} N=۲$$

به‌ازای
$N_n=\{n+۱، n+۲، n+۳، \dots\}$، $N-N_n=\{۱،۲، \dots،n\}$
نتیجه می‌شود

$$\operatorname{card} N-\operatorname{card} N=n$$

وبالاخره‌به‌ازای $P=\{۲،۴،۶\dots\}$، $N-P=I=\{۱،۳،۵،\dots\}$،
نتیجه می‌شود

$$\operatorname{card} N-\operatorname{card} N=\operatorname{card} N$$

تمرین

۱. به‌کمک قاعدهٔ جمع عددهای اصلی ترانسفینی، عدد $n.\alpha$ را حساب کنید.
۲. با مثال مناسبی نشان دهید که $\alpha+\gamma=\gamma$.
۳. آیا این گزاره همیشه درست است؟

$$\operatorname{card} E<\operatorname{card} F \wedge \operatorname{card} F<\operatorname{card} G \Rightarrow \operatorname{card} E<\operatorname{card} G$$

§۱۶. حاصل ضرب عددهای اصلی

۱. مجموعهٔ حاصل ضرب دو مجموعه

مجموعهٔ حاصل ضرب دو مجموعهٔ X و Y، عبارتست از مجموعهٔ زوج‌های مرتب $(x،y)$ با علامت $X.Y$، به‌قسمی‌که x یك عضو از X و y یك عضو از Y باشد.

حاصل ضرب عددهای اصلی دو مجموعه، عبارتست از عدد اصلی مجموعهٔ حاصل ضرب.

$$\text{card } E.\ \text{card } F=\text{card } (E.F)$$

این تعریف، در واقع، تعمیم خاصیت مربوط به‌عددهای اصلی متناهی، در مورد عددهای اصلی نامتناهی است، زیرا به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که برای دو مجموعهٔ متناهی: تعداد عضوهای مجموعهٔ حاصل‌ضرب، برابر است با حاصل‌ضرب تعداد عضوهای هرکدام از مجموعه‌ها.

مثال. $E=\{a، b، c\}$ و $F=\{۱، ۲، ۳، ۴\}$، آنوقت

$$E.F=\{(a،۱)، (a،۲)، (a،۳)، (a،۴)، (b،۱)، (b،۲)، (b،۳)، (b،۴)، (c،۱)، (c،۲)، (c،۳)، c،۴)\}$$

و همان‌طور که پیش‌بینی می‌کردیم، داریم:

$$\text{card } (E.F)=\text{card } E.\ \text{card } F=۳\times۴=۱۲$$

مفهوم مجموعهٔ حاصل‌ضرب را، بدون هیچ اشکالی، می‌توان برای حاصل‌ضرب بیش از دو مجموعه، تعمیم داد. $A.B.C$ عبارتست از مجموعهٔ همهٔ سه‌تائی‌های $(a، b، c)$، به‌قسمی که $a\in A$، $b\in B$ و $c\in C$.

مثال. اگر داشته‌باشیم: $A=\{۱،۲،۳\}$، $B=\{a،b\}$ و $C=\{c،d\}$، خواهیم داشت:

$$A.B.C=\{(۱،a،c)، (۱،a،d)، (۱،b،c)، ...، (۳،b،d)\}$$

$$\text{card } A.\text{card } B.\ \text{cerd } C=\text{card}(A.B.C)=۳\times۲\times۲=۱۲$$

به‌سادگی ثابت می‌شود که حاصل‌ضرب عددهای اصلی، دارای این خاصیت‌هاست:

جا به‌جائی: $\text{card } E.\ \text{card } F=\text{card } F.\ \text{card } E$

شرکت پذیری:

$$\text{card } E.\ (\text{card } F.\ \text{card } G)=(\text{card } E.\ \text{card } F).\text{card } G$$

و پخشی نسبت به‌جمع:

$$(\text{card } E+\text{card } F).\ \text{card } G=\text{card } E.\ \text{card } G+$$
$$+\text{card } F.\ \text{card } G$$

بعلاوه، مثل ضرب مقدماتی، اگر E یا F تهی باشد، مجموعهٔ حاصل‌ضرب $E.F$ هم تهی می‌شود و

$$\text{card }(E.F)=\text{card } E.\ \text{card } F$$

۲. حاصل‌ضرب عددهای اصلی در عامل‌های n، α، γ

برای این سه عدد اصلی خاص، رابطه‌های زیر را ثابت‌می‌کنند:

$n.\alpha=\alpha$، زیرا $\alpha+\alpha+\ldots+\alpha=\alpha$

$\alpha.\alpha=\alpha$، که برای اثبات‌آن، کافی است ثابت شود که‌مجموعهٔ نقطه‌های با مختصات درست ربع اول، شمارا است.

$n.\gamma=\gamma$، زیرا $\gamma+\gamma+\ldots+\gamma=\gamma$.

$\gamma.\gamma=\gamma$، مجموعهٔ $R_1.R_1$، هم‌توان مجموعهٔ نقطه‌های یك‌مربع به‌ضلع ۱ است، که می‌دانیم دارای قوت متصله است.

$\gamma.\alpha=\gamma$، زیرا از $n<\alpha<\gamma$ نتیجه می‌شود

$$n.\gamma\leqslant\alpha.\ \gamma\leqslant\gamma.\gamma$$

یعنی $\gamma\leqslant\alpha.\gamma\leqslant\gamma$. و این ایجاب می‌کند که $\alpha.\gamma=\gamma$.

برای‌دوعدد درست m و n، بنابه‌تعریف داریم:

$$m.n=n+n+\ldots+n \quad (m \text{ بار})$$

این تعریف، برای عددهای ترانسفینی هم برقرار است.

زیر مجموعهٔ S_x از $X.Y$ را، که با تثبیت یك عضو x از X به‌دست می‌آید، درنظرمی‌گیریم. اگرداشته باشیم: $S_x=\{(x,y)|y\in Y\}$، درآن‌صورت $\text{card } S_x=\text{card } Y$، و درنتیجه

$$\text{card } X.\ \text{card } Y=\text{card}(X.Y)=$$
$$=\text{card } Y+\text{card } Y+\ldots+\text{card } Y \qquad (X \text{ بار})$$

(یعنی آنقدر دفعه که عضو در X وجود دارد).

برای مجموعه‌های نامتناهی، حاصل‌ضرب عددهای اصلی، عبارتست از همان جمع (با تکرار بی‌نهایت مَرتبه) جمله‌های برابر.

۳. وجود یك عمل عكس

تقسیم عددهای اصلی ترانسفینی هم، مثل تفریق، تحقق ناپذیر است. مثال‌های زیر، درستی این حکم را نشان می‌دهد.

از $n.\gamma=\gamma$، نتیجه می‌شود: $\frac{\gamma}{\gamma}=n$

از $\alpha.\gamma=\gamma$، نتیجه می‌شود: $\frac{\gamma}{\gamma}=\alpha$

و از $\gamma.\gamma=\gamma$، نتیجه می‌شود: $\frac{\gamma}{\gamma}=\gamma$

تعمیم عمل‌های حساب مقدماتی، به‌عددهای اصلی ترانسفینی، تنها برای عمل‌های مستقیم (جمع و ضرب)، ممکن است و برای عمل‌های عکس (تفریق و تقسیم)، ممکن نیست.

تمرین

۱. آیا گزارهٔ زیر همیشه درست است؟

$$m<n\Rightarrow m.p<n.p$$

۲. با تقسیم مجموعهٔ عددهای طبیعی، به‌تعدادی مجموعه‌های نامتناهی دو به‌دو جدا از هم، تحقیق کنید:

$$\alpha.\alpha=\alpha$$

۱۷§. توان عددهای اصلی

۱. مجموعهٔ نگاشت‌های یك مجموعه در دیگری

الف) اگر E و F دو مجموعهٔ مفروض‌باشند، گراف یك‌نگاشت

از F به‌توی E، زیر مجموعه‌ای از E.F است. مجموعهٔ نگاشت‌های از F به‌توی E، زیر مجموعه‌ای ازمجموعهٔ $\mathscr{P}$ (E.F) است که باعلامت E^F نموده می‌شود.

بنا به‌تعریف، عدد اصلی ترانسفینی $(\text{card } E)^{\text{card } F}$، عبارتست از عدد اصلی مجموعهٔ E^F.

ب) حالابرای‌توضیح تعریف‌قبل، به‌بعضی ملاحظه‌های‌مقدماتی‌تر برمی‌گردیم.

برای عددهای درست m و n، قوت m^n بـا قوت n بار تکـرار عامل m، تعریف می‌شود:

$$m^n = m.m\ldots m \qquad (\text{n بار})$$

این قاعده، برای توان عددهای اصلی ترانسفینی هم، وقتی که توان عددی درست باشد، دارای ارزش است، یعنی

$$n.\,\alpha^3.\,\gamma^2 = n\alpha.(\alpha.\alpha).\,(\gamma.\gamma) = (\alpha.\alpha).\,\gamma = \alpha.\gamma = \gamma$$

ولی، وقتی که γ هم یك عدد اصلـی ترانسفینی بـاشد. چه باید کرد؟

α^β به‌آن معناست‌که عدد α باید β بار در خودش ضرب شود.

اگر A مجموعه‌ای باشد به‌قسمی که $\text{card } A = \alpha$، بنابرتعریف حاصل‌ضرب‌اصلی، باید حاصل‌ضرب A.A...A (β بار)را تشکیل‌دهیم؛ و اگر B مجموعه‌ای باشد، به‌نحوی‌که $\text{card } B = \beta$. حاصل‌ضرب‌قبلی عبارتست از همهٔ β تائی‌هایی‌که از همراه کردن یك عضو A به‌یك‌عضو B به‌دست می‌آید. یك‌چنین βتائی، در واقع، عبارتست از نمایش یك نگاشت از B به‌توی A. این نکته، همان تعریف الف) را به ما امکان می‌دهد:

$$(\text{card } A)^{\text{card } B} = \text{card}(A^B)$$

مثال. مجموعه E^F را روی نمونه‌هایی از مجموعه‌های متناهی‌نشان

می‌دهیم.

$$a)\ M=\{۱,۲\};\quad A=\{a, b, c\}$$

$$A^M=\{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$$

$$\text{card } M=۲,\ \text{card } A=۳,\ \text{card}(A^M)=۹=۳^۲=(\text{card } A)^{\text{card } M}$$

پ) کانتور، برای تعریف مفهوم قوت، مفهوم شهودی وبسیار بارور پوشش های یك مجموعه به‌وسیلهٔ دیگری را، وارد کرده است.

E و F را دو مجموعه می‌گیریم. اگر به‌هر عضو F، یك عضو از E نظیر شود، گویند که مجموعهٔ F به‌وسیلهٔ عضوهـای مجموعـهٔ E پوشیده می‌شود.

در مثال الف)، همهٔ پوشش‌های ممکن مجموعهٔ $M=\{۱,۲,۳\}$ مجموعهٔ $A=\{a,b\}$، مشخص شده است.

پوشش F به‌وسیلهٔ E، عملاً یك نگاشت از F به‌توی E است، و مجموعهٔ پوشش‌های F به‌وسیلهٔ E عبارتست ازمجموعهٔ E^F. به‌خصوص عدد اصلی card F، مجموعهٔ پوشش‌های یك مجموعهٔ F به‌وسیلـهٔ یك مجموعهٔ E، برابر است با $(\text{card } E)^{\text{card } F}$. ولی، مفهوم پـوشش α، گویاتر از مفهوم نگاشت است.

مثال. یك بخت‌آزمایی را درنظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم که سه رقم عدد برنده، از سه جعبه، که هرکدام شامل رقم‌های ۰ تا ۹ هستند، کشیده شده است. هرگاه $M=\{۰, ۱, ۲, ۳, ..., ۹\}$ مجموعهٔ این‌رقم‌ها و $C=\{I, II, III\}$، سه رقم صدگان، دهگان و یکان عددی باشد، که با قرعه درآمده است، مجموعهٔ پـوشش‌های ممکـن مجموعهٔ C به‌وسیلهٔ مجموعهٔ M، نمایشگر مجموعهٔ همهٔ عددهائی است که ممکـن است ضمن قرعه‌کشی، بیرون آیند، یعنی $۳^{۱۰}=۵۹۰۴۹$ عدد ممکن.

در این‌مورد باید توجه‌کردکه به‌ازای مجموعه‌های متناهی، به‌نحوی

که $\mathrm{card}\, M = m$ و $\mathrm{card}\, N = n$، قوت‌مجموعهٔ پوشش‌های N به‌وسیلهٔ M، همان مقدار ترتیب‌های با تکرار m عضو n به n است. در آنالیز ترکیبی، ثابت می‌شود:

$$A_m^n = m.m\ldots m = m^n$$

ت) قاعده‌های حساب مقدماتی، در مورد توان عددهای اصلی ترانسفینی هم درست است، یعنی

$$m^p.m^n = m^{p+n},\quad (m^n)^p = m^{n \cdot p},\quad m^n.p^n = (m.p)^n$$

بنا به‌تعریف، می‌پذیریم که $m^\circ = ۱$

۲. قوت مجموعهٔ زیر مجموعه‌های یك مجموعه

الف) دربند ۱۳ ثابت کردیم که مجموعهٔ زیر مجموعه‌های یك مجموعهٔ، دارای قوتی بزرگتر از قوت این مجموعه است:

$$\mathrm{card}\ \mathscr{P}(E) > \mathrm{card}\ E$$

حالا ثابت می‌کنیم که $\mathscr{P}(E)$ ، چیزی جز همان مجموعهٔ پوشش‌های مجموعهٔ E به‌وسیلهٔ مجموعهٔ $\{۰،۱\}$ نیست.

اگر P زیر مجموعه‌ای از E باشد، پوشش نظیر عبارتست از پوساندن هر عضو P با ۱ و هر عضو مجموعهٔ متمم با ۰، زیر مجموعهٔ تهی، از پوساندن همهٔ عضوهای E با ۰، و زیر مجموعهٔ پر، یعنی خود مجموعهٔ E، از پوساندن همهٔ عضوهای F با ۱، حاصل می‌شود.

عدد اصلی مجموعهٔ $\{۰،۱\}$ عبارتست از ۲، به‌موجب نتیجه‌هائی که‌دربند قبل ثابت کردیم، نتیجه‌می‌شود: $\mathrm{card}\ \mathscr{P}(E) = ۲^{\mathrm{card}\ E}$

یکی از نتیجه‌هایی که از این لم به‌دست آوردیم، این بود که بزرگترین عدد اصلی وجود ندارد، زیرا از $m = ۲^n$ نتیجه می‌شود $m > N$ و از $p = ۲^m$ نتیجه می‌شود $p > m > n$ و همین‌طور تا آخر.

درعوض تاکنون این مسأله حل‌نشده است که بین عددهای‌اصلی

n و 2^n، عددهای اصلی دیگری وجود دارد یا نه! این مسأله، تعمیمی از مسألهٔ پیوستگی مذکور در بند ۱۰.۱۲ می‌باشد، زیرا $\gamma = 2^\alpha$، و ما هم اکنون به‌آن می‌پردازیم.

ب) می‌خواهیم قوت مجموعهٔ زیر مجموعه‌های یك مجموعه را پیدا كنیم.

می‌دانیم كه یك عدد حقیقی واقع بین ۰ و ۱، به‌یك طریق وتنها به‌یك طریق به‌صورت یك كسر دهدهی بی‌پایان

$$r = 0/a_1 a_2 \dots a_i \dots$$

و یا، اگر بخواهید، به‌صورت رشته‌ای شمارا از جمله‌های a_i متعلق به مجموعه $C=\{0, 1, 2, \dots, 9\}$، نوشته می‌شود. به‌زبان دیگر مجموعهٔ R_1، عددهای حقیقی واقع بین ۰ و ۱، با مجموعهٔ پوشش‌های مجموعهٔ عددهای درست طبیعی به‌وسیلهٔ رقم‌های از ۰ تا ۹، هم‌توان است.

از آنجا به‌دست می‌آید: $\gamma = \mathrm{card}(C^\alpha) = 10^\alpha$.

با استدلال مشابهی، به‌ازای یك دستگاه شمار n رقمی، می‌توان نتیجه گرفت كه برای هر عدد اصلی متناهی $n > 1$ داریم: $n^\alpha = \gamma$. به خصوص درحالت $n = 2$، با یك دستگاه شمار بولی (§۲۵ را ببینید) سروكار خواهیم داشت و درنتیجه $\gamma = 2^\alpha$.

مجموعهٔ زیر مجموعه‌های یك مجموعهٔ شمارا، دارای قوت متصله است.

۳. كاربرد قاعده‌های توان درمورد عددهای اصلی $n\in N$، α، γ، f.

$\gamma^n = \gamma$ زیرا $\gamma^n = (10^\alpha)^n = 10^{n\cdot\alpha} = 10^\alpha = \gamma$

$\gamma^\alpha = \gamma$، زیرا $\gamma^\alpha = (10^\alpha)^\alpha = 10^{\alpha\cdot\alpha} = 10^\alpha = \gamma$

$\alpha^\alpha = \gamma$، زیرا رشتهٔ نامساوی‌های $10^\alpha \leqslant \alpha^\alpha \leqslant \gamma^\alpha$، موجب

$\gamma \leqslant \alpha \leqslant \gamma$ می‌شود.

در اینجا توجه کنیم که رابطهٔ $\gamma^n = \gamma$، حاکی از مطلبی است که از قبل می‌دانستیم، و آن اینکه مجموعهٔ نقطه‌های یک خط، یک صفحه، یک فضای سه‌بعدی وحتی یک فضای چند بعدی (به‌تعدادشمارا)، همواره دارای قوت متصله هستند، و درنتیجه می‌توانند روی یک پاره خط به‌دلخواه کوچك، نگاشته شوند.

قوت مجموعهٔ F_1، تابع‌های حقیقی با حوزهٔ تعریف $0 < x < 1$ را به f نمایش می‌دهیم. مجموعهٔ F_1 را می‌توان همچون مجموعهٔ پوشش‌های $R_1 (0 < x < 1)$ به‌وسیلهٔ مجموعهٔ $R (-\infty < x < +\infty)$ درنظر گرفت، که از آنجا نتیجه می‌شود:

$$f = \text{card } F_1 = (\text{card } R_1)^{\text{crad } R} = \gamma^\gamma$$

از این رابطه، رابطه‌های زیر نتیجه می‌شود:

$n^\gamma = f$، زیرا: $\quad n^\gamma = n^{\alpha \cdot \gamma} = \gamma^\gamma = f$

$\alpha^\gamma = f$، زیرا: $\quad \alpha^\gamma = \alpha^{\alpha \cdot \gamma} = (\alpha^\alpha)^\gamma = \gamma^\gamma = f$

$f^n = f$، زیرا: $\quad f^n = (\gamma^\gamma)^n = \gamma^{n \cdot \gamma} = \gamma^\gamma = f$

$f^\alpha = f$، زیرا: $\quad f^\alpha = (\gamma^\gamma)^\alpha = \gamma^{\alpha \cdot \gamma} = \gamma^\gamma = f$

$f^\gamma = f$، زیرا: $\quad f^\gamma = (\gamma^\gamma)^\gamma = \gamma^{\gamma \cdot \gamma} = \gamma^\gamma = f$

به‌طور خلاصه، قاعده‌های توان مربوط به عددهای اصلی $n \in N$، α، γ و f چنین است:

برای $n \in N$ و $n > 1$: $m^n < \alpha$، $\alpha^n = \alpha$، $\gamma^n = \gamma$ $f^n = f$:

برای نمای α: $\quad n^\alpha = \alpha^\alpha = \gamma^\alpha = \gamma$، $f^\alpha = f$؛

برای نمای γ: $\quad n^\gamma = \alpha^\gamma = \gamma^\gamma = f$، $f^\gamma = f$؛

برای نمای f: $\quad n^f > f$

۴. مجموعهٔ تابع‌های پیوسته

C_1 را مجموعهٔ تابع‌های پیوسته، با حوزهٔ تعریف $۰ < x < ۱$، می‌گیریم.

یك تابع را پیوسته گویند، اگر بتواند در یك نقطهٔ x_0 از حوزهٔ تعریف، تنها با مفروض‌بودن مقادیری که در همسایگی این نقطه‌اختیار می‌کنند، معین شود.

در آنالیز از تعریف‌هایی استفاده می‌کنند، که در عمل ساده‌تر است:

$$f(x) \in C \Longleftrightarrow \underset{x \to x_0}{\text{حد}} f(x) = f(x_0)$$

یا

$$f(x) \in C \Longleftrightarrow : \left\{ \begin{array}{l} \text{برای هر } ۰ < \varepsilon \text{ یك } \eta(\varepsilon) \text{ وجود داشته باشد به‌قسمی‌که} \\ |x - x_0| < \eta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \end{array} \right\}$$

یا اینکه

$$f(x) \in C \Longleftrightarrow \underset{\Delta x \to ۰}{\text{حد}} \Delta f = ۰$$

که در آن Δf عبارتست از نمو تابع، متناظر با یك نمو متغیر.

یکی از ویژگی‌های مهم تابع پیوسته این است که اگر به‌ازای هر مقدار گویای یك حوزه حقیقی، معین باشد، خود تابع در تمامی این حوزه معین است.

درجهت اثبات این حکم، یادآور می‌شویم که هر عدد حقیقی‌را می‌توان، با هر تقریب دلخواه، به‌وسیلهٔ یك عدد گویا بیان‌کرد. مثلاً:

$$۱/۴۱ < ۱/۴۱۴ < \sqrt{۲} < ۱/۴۱۵ < ۱/۴۲$$

پس، مجموعهٔ C_1 تابع‌های با حوزهٔ تعریف $۰ < x < ۱$، و پیوسته در این فاصله، مشمول مجموعهٔ پوشش‌های مجموعهٔ شمارای

عددهای گویای واقع بین ۰ و ۱، به‌وسیلهٔ مجموعهٔ عددهای حقیقی است.

می‌دانیم $\text{card}(R_1^N) = \text{card}\ R^{\text{crad}\ N} = \text{card}\ R_1$ از آنجا: $\text{card}\ C_1 \leqslant \text{card}\ R_1$.

با این حال، مجموعهٔ C_1 تابع‌های پیوسته با حوزهٔ تعریف $0 < x < 1$، تنها زیر مجموعهٔ محضی از مجموعهٔ R_1^N است، زیرا نگاشت‌های مجموعهٔ مقادیر گویای x به‌توی مجموعهٔ مقادیر y، به‌طور دلخواه به‌عمل نمی‌آید. فرض پیوستگی ایجاب می‌کند که به مقادیر همسایهٔ x، مقادیر همسایهٔ y نظیر باشد، و این محدودیت مستلزم $C_1 \subset R_1^N$ است.

در بند ۱۲، مجموعهٔ K_1، تابع‌های ثابت در فاصلهٔ $0 < x < 1$ را دیدیم. می‌دانیم که این مجموعه، چیزی جز یك زیر مجموعهٔ خاص‌از مجموعهٔ تابع‌های پیوسته در این‌فاصله نیست، و که دارای قوت‌متصله است: $K_1 \subset C_1$ و $K_1 \sim R_1$.

از رابطه‌های $K_1 \subset C_1 \subset R_1^N$، $\text{card}\ R_1^N = \text{card}\ R$ و $\text{card}\ K_1 = \text{card}\ R_1$، و به‌موجب لمی که در بند ۱۴ ثابت کردیم، نتیجه می‌شود که: $\text{card}\ C_1 = \text{card}\ R_1$.

مجموعهٔ تابع‌های پیوسته در فاصلهٔ $0 < x < 1$، دارای قوت متصله است.

تمرین

۱. قوت مجموعهٔ پوشش‌های $D = \{1، 2، \ldots، 12\}$ را به‌وسیلهٔ مجموعهٔ $M = \{-1، 0، 1\}$ پیدا کنید.

۲. به‌وسیلهٔ کدام فاصلهٔ y، تابع $y = \sin x$، مجموعهٔ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ را می‌پوشاند؟

۳. به‌وسیلهٔ کدام‌مجموعهٔ مقادیر y، تابع $y=(-1)^x$، مجموعهٔ آوندهای (آوند = آرگومان) $X=\{1, 2, 3, 4, ...\}$ را می‌پوشاند؟

۴. رابطه‌های $m^1=m$ و $1^m=1$ را به‌کمک مفهوم مجموعهٔ پوشش‌های یك مجموعه به‌وسیلهٔ دیگری ثابت کنید.

۵. رابطهٔ $m^p.n^p=(m.n)^p$ را ثابت کنید.

۶. قوت مجموعهٔ تابع‌های تعریف شده روی مجموعهٔ حقیقی‌ها را، که منحصراً مقادیر گویا را اختیار می‌کند، تعیین کنید.

بخش سوم

مجموعه‌های مرتب

VI. گونه‌های ترتیب

§ ۱۸. مفهوم مجموعهٔ مرتب

۱. عددهای ترتیبی، عددهای اصلی

دستور زبان می‌آموزد که عددهایی هستند که کمیت چیزها را معین می‌کنند: اینها عبارتند ازعددهای اصلی. عددهایی هم وجود دارند که ترتیب و ردیف یك شیء را بین سایر اشیاء معلوم می‌دارند، واینها هم عددهای ترتیبی هستند.

یاد گرفته‌ایم که چطور بدانیم که یك مجموعه دارای سه شیء است، و چگونه شیء سوم را از دوتای دیگر تمیز دهیم.

روشن است که نمی‌توانیم مثلاً عدد سه را، بیرون از بستگی آن به‌نوعی ترتیب، به‌کار ببریم. وقتی‌که مجموعه‌ای از اشیاء را به‌هر طریق و حتی با انگشتان می‌شماریم، یك شیء اول، یك شیء دوم و یك شیء سوم را نشان داده‌ایم.

احساس و درك ما چنانست که جز در پیچ و خم نوعی ترتیب در فضا و یا در زمان، نمی‌توان آگاهی‌های یك مجموعه را پذیرفت.

مفهوم مجموعهٔ متناهی ، همچون «اجتماع گروهی از اشیاء

در یك کل، که قابل تمیز به‌وسیلهٔ حس ما و درك ما باشند»، تعریف می‌شود. چنین «تعریفی» ما را هرچه بیشتر به‌سمت انتزاع می‌کشاند و از ما طلب می‌کند که هرگونه نمایش ترتیبی را، ازمجموعه جداکنیم. قابل‌توجه است که همین پرهیز از درك یك مجموعه به‌عنوان یك رشتهٔ مرتب، و یا بی‌توجهی به‌ماهیت عضوهای یك مجموعه است که ما را به‌مفهوم زیبا و ظریف عددهای اصلی ترانسفینی رسانده است.

عادت کرده‌ایم که عدد اصلی ترانسفینی را برای قوت هرکدام از مجموعه‌های هم‌توان (بدون دانستن ماهیت آنها)، نشان دهیم. مثلاً

$$\operatorname{card} N=\operatorname{card}\{۱، ۲، ۳، \ldots\}=\operatorname{card}\{۲، ۴، ۶، \ldots\}=$$
$$=\operatorname{card}\{۱، ۳، ۵، \ldots\}$$

همین نوع درك از یك مجموعه است که امکان فهم‌تعریفی راکه کانتور از عدد اصلی کرده است، به‌ما می‌دهد: «قوت یا عدد اصلی یك مجموعه عبارتست از مفهومی‌که درك ما، به‌کمك نیروی انتزاعی خود، به‌مجموعه داده است، بدون اینکه از ماهیت عضوها و ترتیبی‌که این عضوها دارند، اطلاعی داشته باشیم».

۲. نمونه‌هایی از مجموعه‌های مرتب

در این بخش، باز هم به‌ماهیت عضوهای یك مجموعه توجهی نداریم، ولی‌مجموعه‌های هم‌توان را، با توجه به‌ردیف عضوهای آنها، بررسی می‌کنیم.

حالا به‌بعضی نکته‌های اساسی می‌پردازیم.

الف) مجموعهٔ $N=\{۱، ۲، ۳، \ldots\}$، عضو اول دارد، ولی‌عضو آخر ندارد. به‌جز عضو اول، هر عضو دیگر، همراه است با عضوی قبل از خود و عضوی بعد از خود. مثلاً ۵ قبل از ۶، و ۷ بعد از ۶ قرار

دارد.

ب) مجموعهٔ $\overline{N}=\{...، ۳، ۲، ۱\}$، عضو آخر دارد، ولی عضو اول ندارد. دراینجا هم، به‌هر عضو مجموعه، به‌جز عضو آخر، می‌توان یك عضو قبل و یك عضو بعد، نظیر کرد.

پ) مجموعهٔ همهٔ کسرهای‌تحویل ناپذیر، که عضوهای‌آن‌برحسب بزرگی‌آنها مرتب‌شده باشند، نه‌عضو اول دارد ونه عضو‌آخر. همچنین، درچنین مجموعه‌ای، نمی‌توان به‌هر عضو، عضو قبل و عضو بعد را، نظیرکرد. نه‌کوچکترین و نه‌بزرگترین‌کسر وجود ندارد. بین هر دوکسر دلخواه، هر قدرکه به‌هم نزدیك باشند، باز هم‌کسرهای دیگری وجود دارد، و مثلاً واسطهٔ حسابی‌آنها.

ت) مجموعهٔ Z عددهای درست، اگر به‌ترتیب زیر مرتب شود:

$$Z=\{۰، +۱، -۱، +۲، -۲، ...\}$$

عضو اول دارد، ولی عضو آخر ندارد. به‌هر عضو، عضوی نظیر است که بلافاصله بعد از آن قرار دارد؛ همچنین به‌هر عضو ـ به‌جز عضو اول ـ عضوی نظیر است که بلافاصله قبل از آن است.

ث) اگر مجموعهٔ اخیر را به‌طرز دیگری مرتب کنیم:

$$\overline{Z}=\{...، -۳، -۲، -۱، ۰، ۱، ۲، ۳، ...\}$$

دیگر نه عضو اول دارد و نه عضو آخر، و در هرحال، به هر عضو، یك یك عضو بلافاصله قبل و یك عضو بلافاصله بعد، نظیر است.

ج) در مجموعهٔ $E=\{۱، ۳، ۵، ۷، ...، ۲، ۴، ۶، ۸، ...\}$، دو عضو ۱ و ۲، چنانند که عضوی بلافاصله قبل از خود ندارند.

توجه داشته باشیم‌که عضوهای‌مجموعه‌های هم‌توان را، به‌طریقه‌های کاملاً متفاوت، می‌توان مرتب کرد.

از این به‌بعد، هرجا که از مجموعهٔ مرتب صحبت کنیم، به‌این معناست که برای عضوهای آن، نوعی ترتیب قایل شده‌ایم.

مفهوم‌هایی از قبیل همسایگی، پیوستگی و بُعد، که به‌خاطر اهمیت کمتر آنها نسبت به‌مفهوم هم‌توانی، تا اینجا مورد توجه قرار نگرفته‌اند، در بخش‌های بعد، مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۳. رابطهٔ ترتیب. رابطهٔ پیش ترتیب

رابطـهٔ $\mathscr{R}$ را نسبت به‌عضوهـای x و y (یـا بین x و y)، یـك رابطهٔ ترتیب با علامت $x \leqslant y$ گویند، به‌شرطی‌که در اصل‌های زیرصدق کند:

الف) بازتابی: $x \leqslant x$،

ب) ناتقارنی: $x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y$

پ) سرایت‌پذیری: $x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$

$x \leqslant y$ خوانده می‌شود: x مقدم بر y یا برابر آنست، y مؤخر بر x یا برابر آنست.

اگر اصل بازتابـی را کنار بگذاریم، یك رابطهٔ پیش ترتیب ، به‌دست می‌آید.

رابطهٔ پیش ترتیب با علامت $x < y$ نشان‌داده می‌شود. این‌رابطه

الف) نامتقارن است: $x < y \Rightarrow y > x$

ب) سرایت‌پذیر است: $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$

چند مثال

الف) رابطهٔ $x \leqslant y$ (x کوچکتر یا برابر y است)، روی مجموعهٔ عددهای حقیقی، یك رابطهٔ ترتیب را مشخص می‌کند.

ب) رابطهٔ $x < y$ (x اکیداً کوچکتر از y است) یك رابطهٔ پیش ترتیب را روی مجموعهٔ عددهای حقیقی مشخص می‌کند.

مجموعهٔ E، مجهز به‌یك رابطهٔ ترتیب، مرتب است.

مجموعهٔ E را کاملا مرتب گویند، وقتی‌که برای‌هر زوج دلخواه

x و y از عضوهای E داشته باشیم: یا $x \geqslant y$ یا $y \geqslant x$.

چند مثال

الف) مجموعه‌های N و R، با رابطهٔ $\leqslant$، کاملاً مرتب می‌باشند.

ب) در صفحهٔ دکارتی، رابطهٔ ترتیب بین دو نقطهٔ $P_۱$ و $P_۲$، با این گزاره تعریف شده است:

$$P_۱ \leqslant P_۲ \Leftrightarrow \{x_۱ = x_۲ \wedge y_۱ \leqslant y_۲\}$$

که درآن $(x_۱ ، y_۱)$ و $(x_۲ ، y_۲)$ به‌ترتیب عبارتند از مختصات نقطه‌های $P_۱$ و $P_۲$. این رابطه، برای نقطه‌های خطی به‌معادلهٔ $x=a$، یك رابطهٔ کاملاً مرتب است، ولی برای مجموعهٔ نقطه‌های صفحه، کاملاً مرتب نیست، زیرا اگر داشته باشیم $x_۱ \neq x_۲$، نقطه‌های $P_۱$ و $P_۲$ مقایسه‌پذیر نیستند.

پ) در مثال $N = \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ...\}$، $<$ به معنای کوچکتر و $>$ به‌معنای بزرگتر است.

ت) در مثال $\overline{N} = \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ...\}$، $<$ به‌معنای بزرگتر به $>$ به‌معنای کوچکتر است.

ث) مجموعهٔ $\overline{Z} = \{۰ ، -۱ ، +۱ ، -۲ ، +۲ ، ...\}$، با رابطهٔ پیش ترتیب که به‌وسیلهٔ

$$x < y \Leftrightarrow \Big((|x| < |y|) \vee (|x| = |y| \wedge x = -|x|) \Big)$$

تعریف می‌شود، خوش ترتیب است.

ج) مجموعهٔ $E\{۱ ، ۳ ، ۵ ، ... ، ۲ ، ۴ ، ۶ ، ...\}$، با رابطهٔ زیر خوش ترتیب است:

$$x < y \Leftrightarrow \Big((x \in p \wedge y \in I) \vee (x ، y \in p \wedge x_۱ < y) \vee (x ، y \in I \wedge x \leqslant y) \Big)$$

مجموعهٔ X دارای عضواول a است، به‌شرطی که هر عضو x از X، در رابطهٔ $x \geqslant a$ صدق کند.

مجموعهٔ X دارای عضو آخر b است، به‌شرطی‌که هر عضو x از

X در رابطه $x \leqslant b$ صدق کنند.

یك مجموعهٔ کاملاً مرتب، حداکثر یك عضو اول و یك عضو آخر دارد.

اگر به‌ازای سه‌عضو a، b و c داشته باشیم: $a < b < c$، گویند که b بین a و c است.

مجموعه‌های $\{\ldots ,۳ ,۲ ,۱\}$ و $N = \{۱ ,۲ ,۳ ,\ldots\}$، $\bar{N} = \{\ldots ,۳ ,۲ ,۱\}$، از این‌جهت که عضوهایشان یکی است، برابرند، ولی از نظر مجموعه‌های کاملاً مرتب، برابر نیستند، زیرا با رابطه‌های ترتیب متفاوتی، مرتب شده‌اند.

هربخش P از یك مجموعهٔ کاملاً مرتب E، کاملاً مرتب است. رابطهٔ ترتیب بخش P را، القا شده روی P، به‌وسیلهٔ رابطهٔ ترتیب مفروض E گویند.

بنا به‌تعریف، مجموعهٔ تهی را، به‌عنوان مجموعه‌ای کاملاً مرتب، درنظر می‌گیریم.

تمرین

۱. یك رابطهٔ ترتیب برای مجموعهٔ کسرهای تحویل ناپذیر تعیین کنید، به‌نحوی که این مجموعه دارای یك عضو اول باشد و به‌هرکدام از عضوها (به‌جز عضو اول)، یك عضو بلافاصله قبل ویك عضو بلافاصله بعد، نظیر شود.

۲. در شمارهٔ ۲ (نمونه‌هایی از مجموعه‌های مرتب)، تعدادی ازمجموعه‌های کاملاً مرتب را از مجموعهٔ عددهای درست شرح دادیم. مجموعه‌های دیگری را تعریف کنید.

۳. یك رابطهٔ پیش ترتیب در فاصلهٔ $۱ > x > ۰$ تعریف کنید.

§۱۹. یکدیسگی (ایزومورفیسم[1]). مجموعه‌های یکدیسه (ایزومورف[2])

۱. تعریف

برای مجموعه‌های کاملاً مرتب، می‌توان مفهوم مجموعه‌های هم‌توان را به‌کمك مفهوم مجموعه‌های یکدیسه (ایزومورف)، استحکام بخشید.

یك نگاشت دو سوئی $f(x)$، از یك مجموعهٔ مرتب X به‌روی یك مجموعهٔ مرتب Y، یکدیسگی است، وقتی که رابطه‌های $x_1 \leqslant x_2$ و $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ هم‌ارز باشند.

دومجموعهٔ X و Y را یکدیسه‌گویند، وقتی‌که‌یك یکدیسگی از X به‌روی Y وجود داشته باشد و می‌نویسیم: $X \simeq Y$.

چند مثال

الف) $N = \{۱، ۲، ۳، ...\}$ و $P = \{۲، ۴، ۶، ...\}$. N و P یکدیسه هستند، زیرا تابع $y = ۲x$، یك یکدیسگی N به‌روی P است.

ب) مجموعه‌های کاملاً مرتب $N = \{۱، ۲، ۳، . . .\}$ و $\bar{N} = \{... ، ۳، ۲، ۱\}$، یکدیسه نیستند. این دومجموعه، هم‌توان و حتی برابرند، ولی N دارای یك عضو اول‌است (عدد ۱)، که برهمهٔ عضوهای دیگر مقدم است، و عضوی از $\bar{N}$ که‌بخواهد با یك یکدیسگی نظیر ۱ باشد، باید مقدم بر همهٔ عضوهای $\bar{N}$ باشد. دراین‌صورت، $\bar{N}$ دارای یك عضو اول می‌شود که به‌روشنی چنین نیست.

---

1. isomorphisme.

2. isomorphe.

۲. ویژگی‌های رابطهٔ یکدیسگی

از تعریف مجموعه‌های یکدیسه نتیجه می‌شود که رابطهٔ یکدیسگی، مثل رابطهٔ هم‌توانی:

الف) بازتاب است: $E \simeq E$

ب) متقارن است: $E \simeq F \Rightarrow F \simeq E$

پ) سرایت‌پذیر است: $E \simeq F \wedge F \simeq G \Rightarrow E \simeq G$

اگر دو مجموعه یکدیسه باشند، هم‌توان هستند، ولی عکس آن درست نیست. این موضوع را می‌توان در مثال مربوط به‌مجموعه‌های $N=\{1, 2, 3, \ldots\}$ و $\bar{N}=\{\ldots, 3, 2, 1\}$ دید که درعین هم‌توانی، یکدیسه نیستند.

با همین مثال، قضیه‌های زیر نیز روشن می‌شود:

اگر یك مجموعه، با مجموعه‌ای که دارای عضو اول (یا آخر) است. یکدیسه باشد، خود این مجموعه هم دارای عضو اول (یاآخر) خواهدبود.

اگر E یك مجموعهٔ کاملاً مرتب و F یك مجموعهٔ هم‌توان E باشد، می‌توان F را طوری مرتب کرد که با E یکدیسه باشد.

وقتی‌که E و F هم‌توان‌باشند، یك‌نگاشت دوسوئی ازE به‌روی F وجود دارد. برای اینکه این دو مجموعه یکدیسه باشند، کافی است F را طوری مرتب کنیم‌که این نگاشت یك یکدیسگی باشد.

چند مثال

الف) مجموعه‌های $N=\{1, 2, 3, \ldots\}$ و $\bar{Z}=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ را در نظر می‌گیریم. N و $\bar{Z}$ هم‌توان هستند، زیرا هردو، مجموعه‌هایی شمارا مـی‌باشند. ولی این دو مجموعه یکدیسه نیستند، زیرا N، برخلاف $\bar{Z}$، عضو اول ندارد.

حالا اگر مجموعهٔ عددهای درست را به‌شکل زیر مرتب کنیم:

$$Z=\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$$

و یا اگر N را به‌این صورت:

$$\bar{\bar{N}}=\{\dots ,۶ ,۴ ,۲ ,۱ ,۳ ,۵ ,\dots\}$$

آنوقت N و Z یکدیسه می‌شوند.

ب) مجموعه‌های $X=\{x|۱\leqslant x\leqslant ۲\}$ و $Y=\{y|۵\leqslant y\leqslant ۱۰\}$، را در نظر می‌گیریم. این دومجموعه با رابطهٔ $x\leqslant y$ (x کوچکتر از y است) کاملاً مرتب‌اند. X و Y با نگاشت $y=۵x$، که یك یکدیسگی است، نظیر می‌شوند و درنتیجه دو مجموعه، یکدیسه‌اند.

پ) دو مجموعهٔ $X=\{x|۰<x\leqslant ۱\}$ و $Y=\{y|۰\leqslant y<۱\}$ را درنظر می‌گیریم. این دو مجموعه، که با رابطهٔ ترتیب $x\leqslant y$ کاملاً مرتب‌اند، یکدیسه نیستند، زیرا از دو مجموعه، تنها Y دارای عضو اول است؛ بعلاوه به‌سادگی دیده می‌شود که هیچ نگاشتی از X به‌روی Y، و مثلاً $y=۱-x$، یك یکدیسگی نیست.

حالا مجموعهٔ Y را با رابطهٔ ترتیب $y_۱\leqslant y_۲ \Longleftrightarrow y_۱\geqslant y_۲$ مرتب می‌کنیم (می‌خوانیم: $y_۱$ مقدم بر $y_۲$ است اگر $y_۱$ بزرگتر از $y_۲$ باشد). در این صورت نگاشت $y=۱-x$ یك یکدیسگی از X به روی Y، و دو مجموعه یکدیسه می‌شود.

ت) مجموعه‌های‌هم‌توان $N=\{۱ ,۲ ,۳ ,\dots\}$ و

$$T=\{۱۰ ,۲۰ ,۳۰ ,\dots ,۱۱ ,۲۱ ,۳۱ ,\dots ,۱۹ ,۲۹ ,۳۹ ,\dots\}$$

به‌روشنی یکدیسه نیستند.

تمرین

۱. آیامجموعه‌های $X=\{x|۱<x<۲\}$ و $Y=\{y|۰\leqslant y\leqslant ۱\}$ هم‌توان هستند؟ آیا یکدیسه هستند؟

۲. مجموعه‌های $A=\{۱۰ ,۱۰۰ ,۱۰۰۰ ,\dots\}$ و

$$B=\{\dots ,۸۱ ,۲۷ ,۹ ,۳ ,۲ ,۴ ,۸ ,۱۶ ,\dots\}$$

را طوری مرتب کنید که یکدیسه باشند.

۳. مجموعهٔ $P=\{۱ ,-۲ ,۴ ,-۸ ,۱۶ ,-۳۲ ,\dots\}$ را طوری‌مرتب کنیدکه داشته باشیم: $a_n<a_{n+۱}\Longleftrightarrow a_n<a_{n+۱}$ (اگر a_n کوچکتر

است از a_{n+1}، a_n مقدم است بر a_{n+1}).

§۲۰. عمل روی گونه‌های ترتیب

۱. مفهوم گونهٔ ترتیب

الف) همانطورکه مفهوم هم‌توانی ما را به‌تعریف عددهای‌اصلی راهنمایی کرد، مفهوم یکدیسگی هم ما را به تعریف گونه‌های ترتیب می‌رساند.

گونهٔ ترتیب یك مجموعهٔ کاملاً مرتب، رابطهٔ ترتیبی را که روی این مجموعه تعریف شده است، مشخص می‌کند.

دو مجموعه یکدیسه هستند، وقتی که دارای یك گونهٔ ترتیب باشند.

گونهٔ ترتیب مجموعهٔ E را باعلامت $\operatorname{ord} E$، و گونه‌های‌ترتیب را معمولاً با حرف‌های کوچك الفبای یونانی نشان می‌دهید:

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \nu, \ldots$$

چند مثال

مجموعه‌های $E=\{1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}$ و $F=\{1, 2, 3, \ldots\}$ و $\bar{F}=\{\ldots, 3, 2, 1\}$، در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند:

$$E \neq F, \; E \neq \bar{F}, \; F = \bar{F}, \; E \subset F, \; E \subset \bar{F},$$
$$\operatorname{card} E = \operatorname{card} F = \operatorname{card} \bar{F} = \operatorname{card} N, \; E \sim F \sim \bar{F},$$
$$\operatorname{ord} E = \operatorname{ord} F, \operatorname{ord} E \neq \operatorname{ord} \bar{F}, \operatorname{ord} F \neq \operatorname{ord} \bar{F},$$
$$E \not\simeq \bar{F}, \; E \simeq F, \; F \not\simeq \bar{F}$$

می‌دانیم که مجموعه‌های هم‌توان ممکن است دارای گونه‌های ترتیب مختلف باشند.

گونه‌های ترتیب را، هرچند که با هم اختلاف داشته باشند، با

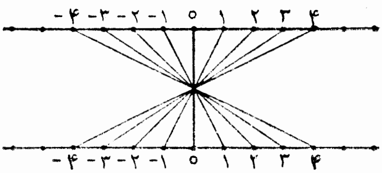
کمیت مقایسه‌پذیر نیستند، و برخلاف عددها، نمی‌توان آنها را به‌ترتیب کمیت‌های صعودی ردیف کرد. به‌همین مناسبت است که از گونه‌های ترتیبی گفتگو می‌شود، نه از عددهای ترتیبی.

ب) مجموعه‌های متناهی، اگر دارای یك قوت باشند، همیشه دارای یك‌گونهٔ ترتیب هستند، به‌زبان دیگر.

مجموعه‌های متناهی هم‌توان، یکدیسه هستند.

وقتی‌که با چهار عدد سروکار داشته باشیم، به‌هر ترتیبی که قرارگرفته باشند، همیشه می‌توان عدد آخر را، «چهارمی» نامید.

گونهٔ ترتیب در مجموعه‌های $\{a, b, c, d\}$ ، $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ ، $\{s, t, u, v\}$، یکی است و طبیعی است‌که اگر به‌دلیل‌عملی بودن‌کار، این گونه را «۴» بنامیم. عددهای طبیعی، درعین حال هم عددهای‌اصلی و هم گونه‌های ترتیب مجموعه‌ـ های متناهی هستند.



شکل ۳۲. برابری گونه‌های ترتیب:
$^*\eta=\eta, {}^*\lambda=\lambda$

پ) اگر یك مجموعهٔ کاملاً مرتب، دارای گونهٔ μ باشد، مجموعه‌ای را که به‌ترتیب وارون آن‌مرتب‌شده‌است(یعنی‌مجموعه‌ای که از ردیف وارون عضوهای مجموعهٔ قبلی به‌دست می‌آید)، بنا بر قرارداد به‌گونهٔ ترتیب $^*\mu$ نشان می‌دهیم. اگر η و λ به‌ترتیب گونه‌های ترتیب مجموعهٔ عددهای گویا و مجموعهٔ عددهای حقیقی باشد، که برحسب مقادیر صعودی مرتب شده‌اند، از روی شکل ۳۲ می‌توان نتیجه گرفت که $^*\eta=\eta$ و $^*\lambda=\lambda$.

مثلاً اگر فرض‌کنیم: $\text{ord } N=\text{ord}\{۱, ۲, ۳, \ldots\}=\omega$، در آن‌صورت داریم: $\text{ord } \overline{N}=\text{ord}\{\ldots, ۳, ۲, ۱\}={}^*\omega$

۲. حاصل جمع ترتیبی در مجموعه. جمع گونه‌های ترتیب

اگر E و F دو مجموعهٔ کاملاً مرتب و جدا ازهم باشند، حاصل‌جمع ترتیبی E و F، با علامت $E+F$، عبارتست از اجتماع این دو مجموعه با ترتیبی که همهٔ عضوهای مجموعهٔ E، مقدم بر همهٔ عضوهای مجموعهٔ F باشد.

حاصل جمع ترتیبی، عملی است که با عمل اجتماع فرق دارد و برخلاف اجتماع، متقارن نیست: $E+F\neq F+E$.

مجموع گونه‌های ترتیب دو مجموعه، عبارتست از گونهٔ ترتیب حاصل جمع ترتیبی این مجموعه‌ها.

مثل حاصل جمع ترتیبی، جمع گونه‌های ترتیب دومجموعه‌دارای خاصیت جا به‌جائی نیست.

چند مثال

الف) $\mathrm{ord}\{۱، ۲، ۳، \dots\}+\mathrm{ord}\{a\}=\mathrm{ord}\{۱،۲،۳،\dots،a\}$،

$\omega+۱=\omega+۱$

$\mathrm{ord}\{a\}+\mathrm{ord}\{۱، ۲، ۳، \dots\}=\mathrm{ord}\{a، ۱، ۲، ۳، \dots\}$، $۱+\omega=\omega$

ب)

$\mathrm{ord}\{\overline{۱}، \overline{۲}، \overline{۳}، \dots\}+\mathrm{ord}\{۱، ۲، ۳، \dots، n\}=\mathrm{ord}\{\overline{۱}، \overline{۲}، \overline{۳}، \dots، ۱، ۲، ۳، \dots، n\}$

$\mathrm{ord}\{۱، ۲، ۳، \dots، n\}+\mathrm{ord}\{\overline{۱}، \overline{۲}، \overline{۳}، \dots\}=\mathrm{ord}\{۱،۲،۳،\dots، n، \overline{۱}، \overline{۲}، \overline{۳}، \dots\}$

$\omega+n=\omega+n$ ، درحالی که $n+\omega=\omega$

پ)

$\mathrm{ord}\, P+\mathrm{ord}\, I=\mathrm{ord}\{۲، ۴، ۶، \dots، ۱، ۳، ۵، \dots\}=\omega+\omega$

$\omega+{}^*\omega=\mathrm{ord}\, I+{}^*\mathrm{ord}\, P=\mathrm{ord}\{۱، ۳، ۵، \dots، ۶، ۴، ۲، \dots\}$

مجموعهٔ $\overline{Z}\{\dots، -۳، -۲، -۱، ۰، ۱، ۲، ۳، \dots\}$ نیز، که قبلاً دیدیم، دارای گونهٔ ترتیب $^*\omega+\omega$ است.

حاصل‌جمع ترتیبی مجموعه‌ها، و جمع گونه‌های ترتیب، شرکت‌پذیر هستند.

چند مثال

$(\omega+1)+{}^*\omega=\omega+(1+{}^*\omega)=\mathrm{ord}\{1, 2, 3, \ldots, a, \ldots, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}\}$

$({}^*\omega+1)+\omega={}^*\omega+(1+\omega)={}^*\omega+\omega=\mathrm{ord}\{\ldots, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, a, 1, 2, 3, \ldots\}$

برای گونه‌های ترتیب مجموعه‌های متناهی، که همان عددهای درست طبیعی هستند، می‌توان از قاعده‌های جمع معمولی استفاده کرد.

مثال

$\mathrm{ord}\{1, 2, 3\}=3$ ، $\mathrm{ord}\{a, b, c, d\}=4$

$\mathrm{ord}\{1, 2, 3\}+\mathrm{ord}\{a, b, c, d\}=\mathrm{ord}\{1, 2, 3, a, b, c, d\}=3+4=7$

$\mathrm{ord}\{a, b, c, d\}+\mathrm{ord}\{1, 2, 3\}=\mathrm{ord}\{a, b, c, d, 1, 2, 3\}=4+3=7$

۳. حاصل‌ضرب قاموسی مجموعه‌ها. ضرب گونه‌های ترتیب

الف) حاصل ضرب قاموسی دومجموعهٔ کاملاً مرتب X ، Y، عبارت است از مجموعهٔ حاصل ضرب کاملاً مرتب $X.Y$ با رابطهٔ

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \Longleftrightarrow \{x_1 \leqslant x_2\} \vee [(x_1=x_2) \wedge (y_1 \leqslant y_2)]$$

حاصل ضرب گونه‌های ترتیب دومجموعهٔ کاملاً مرتب، عبارتست ازگونهٔ ترتیب حاصل‌ضرب قاموسی این دو مجموعه.

مثال. اگر L مجموعهٔ ۲۶ حرف الفبای لاتینی، و M مجموعهٔ واژه های سه حرفی، $M \subset L^3$، باشد. وقتی که L و M را به‌ترتیب الفبائی مرتب کرده باشیم، M زیر مجموعه‌ای از حاصل‌ضرب قاموسی $L.L.L$ است.

ب) ضمن یك مثال نشان می‌دهیم که مفهوم حاصل‌ضرب گونهٔ ترتیب، که برای حاصل‌ضرب قاموسی‌تعریف می‌شود، با ضرب‌مقدماتی‌تری، که برای یك مجموع ترتیبی با تکرار یك جمله تعریف می‌شود، فرقی ندارد.

مجموعه‌های $X=\{۱، ۲، ۳\}$ و $Y=\{۱، ۲\}$ رادرنظر می‌گیریم. حاصل‌ضرب قاموسی X در Y عبارتست از

$$X . Y=\{(۱،۱)، (۱،۲)، (۲،۱)، (۲،۲)، (۳،۱)، (۳،۲)\}$$

و از آنجا: $\text{ord}\, X . \text{ord}\, Y=\text{ord}(X.Y)=۶$

از طرف دیگر، چون داریم: $\text{ord}\, Y=۲$، مجموع ترتیبی دو مجموعهٔ X و $\overline{X}$ (یکدیسهٔ X)را درنظر می‌گیریم:

$$X+\overline{X}=\{۱، ۲، ۳\}+\{\overline{۱}، \overline{۲}، \overline{۳}\}=\{۱، ۲، ۳، \overline{۱}، \overline{۲}، \overline{۳}\}$$

همان‌طور که پیش‌بینی می‌شد:

$$\text{ord}\, X . \text{ord}\, Y=\text{ord}\, X . ۲=\text{ord}(X+\overline{X})=۶$$

پ) ضرب گونه‌های ترتیب، دارای خاصیت جا به‌جائی نیست؛ و تشخیص مضروب (گونهٔ ترتیب مجموعه‌ای که چند بار به خودش اضافه می‌شود) ومضروب فیه (گونهٔ ترتیبی‌که معلوم می‌دارد، چندبار و درچه ترتیبی این مجموع باید انجام پذیرد)، مهم است.

فرض‌کنیم‌که از دو عامل، دومی مضروب‌فیه باشد. داریم:

$$\omega.۲=\omega+\omega=\text{ord}\{۱، ۳، ۵، ...، ۲، ۴، ۶، ...\}$$

ولی

$$۲.\omega=\text{ord}(a_۱، b_۱)+\text{ord}(a_۲، b_۲)+...=\text{ord}\{a_۱، b_۱، a_۲ b_۲، ...\}=\omega$$

به‌طورکلی، رابطه‌های زیر را داریم:

$$n.\omega=\omega \quad (\text{برای } n\in N)$$

ولی $\omega.n\neq\omega.m \quad (\text{برای } n\neq m)$

و بالاخره $\omega^2=\omega+\omega+\ldots=$

$$=\text{ord}\{a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots\}=\omega$$

یا $\omega^2=\omega$

ت) مجموعه‌های P_D ــ مجموعهٔ نقطه‌های یك خط ــ و P_n ــ مجموعهٔ نقطه‌های فاصلهٔ $n-1<x<n$ یکدیسه هستند.

$$P_D \simeq P_1 \simeq P_2 \simeq \ldots \simeq P_n$$

یا
$$\text{ord } P_D=\text{ord } P_1=\text{ord } P_2=\ldots=\text{ord } P_n=\lambda$$

در آن‌صورت، از رابطهٔ

$$P_1+\{1\}+P_2=\{x \mid 0<x<2\}$$

نتیجه می‌شود:

$$\lambda+1+\lambda=\lambda$$

به‌همین ترتیب، با توجه به مجموع ترتیبی همهٔ مجموعه‌های نقطه‌های

$$Q_i=\{x \mid i-1<x<i\} \quad (1\leqslant i\leqslant n)$$

نتیجه می‌شود:

$$(1+\lambda)(1+\lambda)\ldots(1+\lambda)=(1+\lambda).n=1+\lambda$$

از آنجا بالاخره $(1+\lambda).\omega=1+\lambda$

تمرین

۱. به‌وسیلهٔ یك مثال حساب کنید:

$$1+\omega+{}^*\omega=1+\omega$$

۲. گونهٔ ترتیب را در مجموعهٔ $X=\{x \mid x\in Q < 0 < x < 1\}$ تعیین کنید.

۳. رابطه‌های زیر را ثابت کنید:

$$\omega+1\neq\omega+2\neq\omega+3\neq\omega+n, \ (\text{برای هر } n\in N)$$

$$1+\omega=2+\omega=3+\omega=n+\omega=\omega,$$

$$^*\omega+۱={}^*\omega+۲={}^*\omega+۳={}^*\omega+n={}^*\omega$$
$$۱+{}^*\omega\neq۲+{}^*\omega\neq۳+{}^*\omega\neq n+{}^*\omega$$
$$\omega+n+\omega=\omega+(n+\omega)=\omega+\omega$$
$$n+\omega+\omega=(n+\omega)+\omega=\omega+\omega$$

VII . مجموعه‌های خوش‌ترتیب

§۲۱. مفهوم مجموعهٔ خوش‌ترتیب

۱. تعریف

یك مجموعه را خوش ترتیب گویند، وقتی که هرزیر مجموعهٔ ناتهی از این مجموعه، دارای یك عضو اول باشد.

باید توجه کرد که مجموعه‌های خوش‌ترتیب، مجموعه‌هایی هستند که به‌روند شمارش گردن می‌نهند، زیرا از آنجا که هر زیر مجموعهٔ ناتهی از آن دارای یك عضو اول است، می‌توان به‌هر عضو، به جز آخری، یك عضو بلافاصله بعد، همراه کرد.

۲. چند مثال

$$N=\{۱, ۲, ۳, \ldots\}$$
$$Z=\{۰, ۱, -۱, ۲, -۲, \ldots\}$$
$$M=\{۱, ۳, ۵, \ldots, ۲, ۴, ۶, \ldots\}$$

مجموعه‌هایی خوش‌ترتیب هستند، ولی مجموعه‌های زیر، که عضو اول ندارند، مجموعه‌های خوش‌ترتیب نیستند:

$$\bar{N}=\{\ldots, ۳, ۲, ۱\}$$
$$\bar{Z}=\{\ldots, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots\}$$
$$X=\{x|x\in Q \wedge ۰<x<۱\}$$
$$R_۱=\{x|x\in R \wedge ۰<x<۱\}$$

تمرین

۱. رابطهٔ خوش‌ترتیب، روی مجموعهٔ دوتائی‌های زیر را، تعیین‌کنید:

$D=\{(x,y)|x,y\in N\}$

۲. یك رابطهٔ خوش‌ترتیب، روی مجموعهٔ $X=\{x|x\in Q \wedge ۰<x<۱\}$ معین کنید.

۳. آیامجموعهٔ عددهای جبری، به‌نحوی‌که دربند ۳.۱۱ تعیین شده است، خوش‌ترتیب است؟

§۲۲. ویژگی‌های مجموعه‌های خوش‌ترتیب

۱. نتیجه‌هایی از تعریف

هر زیر مجموعه از یك مجموعهٔ خوش ترتیب، خوش ترتیب است.

هر مجموعه‌ای که بایك مجموعهٔ خوش‌ترتیب، یکدیسه باشد، خوش‌ترتیب است.

هر مجموعهٔ متناهی خوش‌ترتیب است.

طبق قرارداد می‌پذیریم که مجموعهٔ تهی، خوش‌ترتیب است.

۲. قطعه‌های یك مجموعهٔ خوش‌ترتیب

اگر زیر مجموعهٔ S از یك مجموعهٔ خوش‌ترتیب E طوری باشد که هر عضو مجموعهٔ S، قبل از عضوی مانند s از E باشد، گویند قطعه‌ای از E به‌وسیلهٔ s معین شده است.

قطعه‌ای‌که به‌وسیلهٔ عضو اولی E معین شده باشد، یك مجموعهٔ تهی است.

قطعه‌ای‌که باعضو ۲ در مجموعهٔ $E=\{۱,۳,۵,...,۲,۴,۶,...\}$ معین شده باشد، عبارتست از مجموعهٔ $I=\{۱, ۳, ۵, ...\}$.

۳. ویژگی‌های مجموعه‌های خوش‌ترتیب

بررسی جدی و عمیق مجموعه‌های خوش‌ترتیب، در چارچوب این کتاب نیست. دراینجا تنها بعضی از نتیجه‌های مربوط به آنها را، بدون اثبات می‌آوریم.

الف) اگر E و F دو مجموعهٔ خوش‌ترتیب باشند، دست‌کم یکی از دوگزارهٔ زیر درست است:

۱) E و F یکدیسه هستند.

۲) یك یکدیسگی تنها از E روی یك قطعه از F، یا برعکس، وجود دارد.

از اینجا نتیجه می‌شود که دو مجموعهٔ خوش ترتیب، به‌کمك نسبت عددهای اصلی آنها، همیشه مقایسه پذیرند.

یکی و تنها یکی از سه‌امکان زیر وجود دارد:

$$\text{card } E = \text{card } F، \text{card } F < \text{card } E، \text{card } E < \text{card } F$$

ب) یك مجموعهٔ خوش‌ترتیب، جز با خودش، یکدیسه نیست.

پ) اگر مجموعه‌های E و F یکدیسه باشند، و اگر E خوش‌ترتیب باشد، در این‌صورت، یك یکدیسگی و تنها یکی از E به روی F وجود دارد.

ت) یك مجموعهٔ خوش‌ترتیب، با هیچکدام از قطعه‌های خودش، یکدیسه نیست.

۴. قضیهٔ خوش‌ترتیبی یا قضیهٔ زرمه‌لو

این قضیه، که‌کانتور هم درکی شهودی از آن داشت، در سال ۱۹۰۴ میلادی به‌وسیلهٔ ارنست زرمه‌لو (Ernest Zermelo) ثابت شد و می‌توان آن‌را نیرومندترین قضیه‌ها دربارهٔ خوش‌ترتیبی دانست. قضیه این است:

هر مجموعه‌ای می‌تواند خوش‌ترتیب باشد.

به‌عبارت دیگر، به‌هر مجموعه‌ای می‌توان یك‌رابطهٔ خوش ترتیبی نسبت‌داد.

باکمال‌تأسف، این قضیه، وجود یك‌رابطهٔ خوش‌ترتیبی را ثابت نمی‌کند، و به‌هیچوجه روشی برای تعیین این رابطه به‌دست نمی‌دهد. ما نمی‌دانیم که حتی برای مجموعه‌های نسبتاً ساده‌ای، مثل مجموعه‌های یکدیسه با مجموعهٔ عددهای حقیقی، کدام رابطهٔ خوش‌ترتیبی صدق می‌کند.

یادداشت. اهمیت قضیهٔ زرمه‌لو در این هم هست‌که امکان می‌دهد، استدلال‌خود را درمورد همهٔ مجموعه‌های‌خوش‌ترتیب، صرفنظر از قوت‌آنها، با روش استقراء، گسترش دهیم.

اصل استدلال استقرائی مبتنی براین است‌که اگر یك گزاره به‌ازای اندیس n درست باشد، به‌ازای اندیس $n+1$ هم درست است. به‌این‌ترتیب، اگر با تحقیق معلوم شودکه این‌گزاره به‌ازای $n=1$ درست است، درستی آن برای همهٔ عددهای درست دیگر هم، محقق می‌شود. و به‌همین صورت است‌که ما می‌توانیم در مجموعه‌های شمارا، ازآن استفاده‌کنیم.

فرض‌کنیم که می‌خواهیم ثابت‌کنیم‌که همهٔ عضوهای یك مجموعهٔ خوش‌ترتیب E، در یك ویژگی $\mathscr{P}$ صدق می‌کند. حکم این‌است: ویژگی برای یك‌عضو مفروض درست است، به‌شرطی‌که به‌ازای همهٔ عضوهای‌قبلی آن، وبه‌خصوص به‌ازای عضو اول E، درست باشد.

ازبرهان خلف استفاده‌می‌کنیم. فرض‌می‌کنیم‌که ویژگی به‌ازای‌تعدادی ازعضوهای E درست نباشد. F را زیر مجموعه‌ای از E می‌گیریم‌که شامل عضوهای غیرصادق در $\mathscr{P}$ باشد. F، کوچکترین‌عضوی‌داردکه f می‌نامیم. همهٔ عضوهای قبلی f، و درنتیجه خود f، در ویژگی $\mathscr{P}$ صدق می‌کند. و از اینجا تناقض پیش می‌آید.

وقتی‌که بنابرقضیهٔ زرمه‌لو، هرمجموعه‌ای‌می‌تواند خوش‌ترتیب‌باشد، می‌توان روش استدلال استقرائی را، برای هرمجموعهٔ نامشخص به‌کاربرد.

تمرین

۱. E عبارتست از مجموعهٔ $\{..., ۶, ۴, ۲, ..., ۵, ۳, ۱\}$. $S_۵$ و $S_۶$ قطعه‌هایی هستند که روی E و به‌وسیلهٔ عضوهای ۵ و ۶ معین شده‌اند، آیا $S_۵$ و $S_۶$ یکدیسه هستند؟

۲. آیا مجموعهٔ $\{..., ۳, ۲, ۱\}=N$ با یکی از قطعه‌های خودش یکدیسه است؟

۳. همان سؤال برای مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ...\}=\overline{N}$.

۲۳§. عددهای ترتیبی

۱. عددهای ترتیبی به‌عنوان گونهٔ ترتیب خاص

الف) از آنجا که همهٔ مجموعه‌های خوش‌ترتیب مقایسه‌پذیرهستند، می‌توانیم گونه‌های ترتیب آنها را هم مقایسه کنیم.

گونهٔ ترتیب مجموعه‌های خوش‌ترتیب را عددهای ترتیبی می‌نامیم.

اگر مجموعهٔ E، با قطعه‌ای از F یکدیسه باشد، گویند که $\text{ord } E < \text{ord } F$.

هرمجموعهٔ خوش ترتیب E دارای یك عدد ترتیبی $\text{ord } E$ است، که با عدد ترتیبی هرمجموعهٔ خوش ترتیب دیگر، مقایسه پذیر است. $\text{ord } N=\omega$، $\omega+۱$، $\omega+۲\omega$، $\omega.۲$، $\omega^۲$، عددهای ترتیبی هستند، درحالی که ω^*، $\omega+\omega^*$، λ، چیزی جز گونه‌های ترتیب نیستند.

ب) وقتی که با مجموعه‌های متناهی سروکار داریم، مفهوم‌های عدد اصلی، گونهٔ ترتیب وعدد ترتیبی، یکی می‌شوند.

عدد اصلی مجموعهٔ ۱۵ دانش‌آموز کلاس پنجم دبیرستان، ۱۵ است. $۱۳۰۷۶۷۴۳۶۸۰۰۰ = !۱۵$ حالتی که برای ردیف آنها وجوددارد،

مجموعه‌های یکدیسه وگونهٔ ترتیب ۱۵ را تشکیل می‌دهند. بعلاوه همهٔ این مجموعه‌ها خوش‌ترتیب هستند و عدد ترتیبی آنها ۱۵ است. اگر هرکدام از !۱۵ جایگشت دانش‌آموزان را بشماریم، خواهیم دید که پانزدهمی، آخرین است.

پ) در حالت مجموعه‌های نامتناهی، با تغییر وضع عضوها، عددهای ترتیبی مختلف به‌دست می‌آید.

مجموعه‌های خوش‌ترتیب زیر را درنظر می‌گیریم:

$N=\{۱، ۲، ۳، ...\}$،

$N_۱=\{۲، ۳، ۴، ...، ۱\}$، $N_۲=\{۳، ۴، ۵، ...، ۱، ۲\}$،

$N_۳=\{۱، ۳، ۵، ...، ۲، ۴، ۶، ...\}$، $N_۴=\{...، ۳، ۲، ۱\}$،

$N_۵=\{۱، ۳، ۵، ...، ۶، ۴، ۲\}$،

$N_۶=\{۱، ۱۱، ۲۱، ...، ۲، ۱۲، ۲۲، ...\}$

همهٔ این مجموعه‌ها دارای قوت شمارا هستند و عضوهایشان یکی است و بنابراین برابرند. بعلاوه همهٔ آنها مرتب‌اند وگونهٔ ترتیب آنها عبارتست از:

$\operatorname{ord} N=\omega$،

$\operatorname{ord} N_۱=\omega+۱$، $\operatorname{ord} N_۲=\omega+۲$

$\operatorname{ord} N_۳=\omega.۲$، $\operatorname{ord} N_۴={}^*\omega$،

$\operatorname{ord} N_۵=\omega+{}^*\omega$، $\operatorname{ord} N_۶=\omega.۱۰$

همهٔ این‌گونه‌های ترتیب متفاوتند، و بین مجموعه‌های آنها، مجموعه‌های یکدیسه وجود ندارد.

مجموعه‌های N، $N_۱$، $N_۲$، $N_۳$ و $N_۶$، خوش‌ترتیب هستند، و عددهای ترتیبی‌آنها عبارتست از: ω، $\omega+۱$، $\omega+۲$، $\omega.۲$ و $\omega.۱۰$، که درنابرابری‌های زیر صدق می‌کنند:

$$\omega<\omega+۱<\omega+۲<\omega.۲<\omega.۱۰$$

مثلاً نابرابری $\omega < \omega + 1$ به‌این مناسبت درست است که N با قطعه‌ای از N_1 که به‌وسیلهٔ عضو ۱ معین شده است، یکدیسه است.

مجموعه‌های N_4 و N_5 خوش‌ترتیب نیستند. N_4 عضو اول ندارد و N_5 ـ بااینکه عضو اول دارد (a) دارای زیرمجموعهٔ {۲، ۴، ۶، ...} است که عضو اول ندارد.

۲. عمل‌ها روی عددهای ترتیبی

عددهای ترتیبی، گونه‌های ترتیبی خاصی‌هستند و درنتیجه، همهٔ قاعده‌هایی که در مورد گونه‌های ترتیب ثابت شده است، در موردآنها هم صدق می‌کند.

روشن است که بعد از عدد ترتیبی μ، عدد ترتیبی $\mu + 1$ قرار دارد. این ویژگی سرچشمهٔ یکی از بارورترین اندیشه‌های کانتور است: یك‌رشتهٔ ناگسیخته از عددها، به‌ورای بی‌نهایت گسترش می‌یابد:

ω	...	۳	۲	۱	۰
$\omega.2$	...	$\omega+3$	$\omega+2$	$\omega+1$	
$\omega.3$	...	$\omega.2+3$	$\omega.2+2$	$\omega.2+1$	
$\omega.\omega=\omega^2$	...	....	.....	.....	
تاآخر	...	ω^2+3	ω^2+2	ω^2+1	

به‌طورکلی، عبارت $\omega^n + \omega^{n-1}.n_1 + \omega^{n-2}.n_2 + \ldots + n_n$، معرف یك عدد ترتیبی ترانسفینی دلخواه است وهمان‌طور، عبارت‌های ω^{ω} و $\omega^{(\omega\omega)}$

حالا دیگر می‌توانیم ورای نامتناهی را هم بشماریم.

هرعدد ترتیبی، متناظر با یك عدد اصلی کاملاً معین است. همهٔ مجموعه‌هایی که متناظر باعددهای ترتیبی ω، $\omega+1$، $\omega+2$، $\omega.2$، ...، ω^2 باشند، دارای قوت شمارا هستند و یك عدد اصلی مفروض، متناظر

است با تمامی یك طبقه ازعددهای ترتیبی؛ و این طبقهٔ عددهایی است که با این‌عدد اصلی همراه است.

ما بیش از این به‌بررسی نظریهٔ مجموعه‌های خوش ترتیب، نمی‌پردازیم. همین‌اندازه هم‌کافی است تا با بیان هیلبرت هم‌داستان شویم‌که این «تحسین‌انگیزترین میوهٔ اندیشهٔ ریاضی است» و «دربین همهٔ آفریده‌های اندیشهٔ انتزاعی‌خالص، یکی از بهترین و بالاترین‌آنها» به‌شمار می‌رود.

امروز نیز، نارسائی زبان ریاضی، مانع ازآن نمی‌شودکه‌ارزش آنچه را که کانتور دربارهٔ رابطه‌های $1+\omega=\omega+1$ و $\omega=\omega+1$، گفته است، درك‌کنیم. او می‌گوید: «آنچه‌که اهمیت دارد، وضع نسبی متناهی‌نسبت به‌نامتناهی است. اگر متناهی پیش از نامتناهی قرارگیرد، جذب نامتناهی می‌شود و ازبین می‌رود. ولی اگر بعد از نامتناهی‌قرار گیرد، باقی می‌ماند وآن‌را به‌یك نامتناهی‌دیگر، که با اولی فرق‌دارد، تبدیل می‌کند».

تمرین

۱. کدامیك از مجموعه‌های زیر خوش‌ترتیب است؟

$$Z=\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$$
$$\overline{Z}=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
$$Z_1=\{0, 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots\}$$
$$Z_2=\{1, 2, 3, \ldots, 0, -1, -2, -3, \ldots\}$$
$$Z_3=\{1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots, 0\}$$

۲. گونه‌های ترتیب مجموعه‌های Z، $\overline{Z}$، Z_1، Z_2، Z_3 کدام‌اند؟ آیا بین این‌گونه‌های ترتیب، عددهای ترتیبی وجود دارد؟

۳. آیاقطعه‌ای ازیك مجموعهٔ خوش‌ترتیب، می‌تواندگونهٔ ترتیب ω^*داشته باشد؟

۴. آیا نابرابری $\mu < \mu + 1$، به‌ازای یك عدد ترتیبی غیرمشخص درست است؟

۵. آیا می‌توان مجموعهٔ $\overline{Z}$ را به‌چند مجموعه طوری تبدیل کرد که همهٔ آنها با هم یکدیسه باشند؟

۶. آیا عبارت‌های $\eta + 1$ و $1 + \eta$، عددهای ترتیبی را نمایش می‌دهند؟ یادآوری کنیم که $\eta = \text{ord } Q$.

بخش چهارم

مجموعه‌های نقطه‌ها

VIII. مفهوم‌هایی که به‌کار می‌بریم

۲۴§. مجموعه‌های خطی. فاصله‌ها

۱. مجموعه‌های خطی

به‌عنوان نمونه‌ای ازکاربرد، در این بخش، **مجموعه‌های نقطه‌ها** را مورد بررسی قرار می‌دهیم. وقتی‌که از مجموعهٔ نقطه‌ها صحبت می‌کنیم، می‌تواند منظورمان نقطه‌های به‌مختصات درست یك خط، یك مربع، یك دایره، یك صفحه باشد (که قبلا هم دربارهٔ آنها گفتگو کرده‌ایم)، ویا مجموعهٔ‌همهٔ نقطه‌های یك پاره‌خط، یك‌خط، یك صفحه، یك مکعب و غیرآن.

در اینجا، تنها به مجموعه‌های خطی، یعنی مجموعه‌هایی از نقطه‌ها، که روی یك خط قرار دارند، اکتفا می‌کنیم. وقتی‌که این خط را، همچون خط عددی درنظر بگیریم (شکل ۲۴)، در واقع چیزی نیست جز یك یکدیسگی مجموعهٔ (مرتب) عددهای حقیقی، به روی مجموعهٔ نقطه‌های یك خط.

اگر P_1 و P_2 به‌ترتیب نگارهٔ عددهای x_1 و x_2 باشند، رابطه‌ـ های $x_1 < x_2$ (x_1 از x_2 کوچکتر است) و $P_1 < P_2$ (P_1 درسمت چپ

$P_۲$ واقع است)، دو رابطهٔ هم‌ارزند.

برای سادگی بیشتر، از عبارت زیر استفاده می کنیم، که هرچند افراطی به‌نظرمی‌رسد، می‌تواند مانع اشتباه بشود: نقطه‌های گویا نگارهٔ عددهای گویا، نقطه‌های گنگ، نگارهٔ عددهای گنگ هستند.

۲. فاصله

برای تعریف دقیق مفهوم فاصله، تأکید می کنیم که:

$[a,b]$ یك فاصلهٔ بسته را نشان می‌دهد که شامل a وb نیز هست.

$]a,b[$ نمایندهٔ یك فاصلهٔ باز است که شامل a،b نیست.

$[a,b[$ یك فاصلهٔ نیم باز از راست را نشان می دهد که شامل a هست، ولی شامل b نیست.

$]a,b]$ به‌معنای یك فاصلهٔ نیم‌باز از چپ است که تنها شامل‌مرز b است.

۳. چند مثال

به‌عنوان نمونه‌هایی ازمجموعهٔ نقطه‌ها، می‌توان ازاین‌مجموعه‌ها نام برد:

مجموعهٔ نقطه‌های با مختصات درست خط عددی:

$\{\ldots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \ldots\}$

مجموعهٔ نقطه‌های $\{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \ldots\}$،

مجموعهٔ نقطه‌های فاصلهٔ $[۰,۱]$،

مجموعهٔ نقطه‌های گویای فاصلهٔ $]۰,۱[$،

مجموعهٔ نقطه‌های گویای فاصلهٔ $]۰,۲[$.

تمرین

۱. مجموعهٔ جوابهای نابرابری مضاعف $۰ \leqslant \frac{۲x-۱}{x+۱} < ۱$، در کدام

مجموعه قرار دارد؟

۲. مجموعهٔ نقطه‌های با مختصات درست فاصلهٔ [۴،۱۵] را بـا مجموعهٔ نقطه های با مختصات درست فاصلهٔ]۱۶ ،۳[مقایسه کنید.

۳. مجموعهٔ نقطه‌های فـاصلهٔ]۱،۱ —[را، مثل مجموعهٔ جـوابهای یك معادله، نمایش دهید.

§ ۲۵. نقطه‌های انباشتگی. نقطه‌های فشردگی

۱. نقطه‌های انباشتگی

نقطهٔ P را، نقطهٔ انباشتگی (یا نقطهٔ تجمع) مجموعهٔ E گویند، به‌شرطی‌که در یك همسایگی به‌قدر دلخواه کوچك P، به‌تعداد نامتناهی از نقطه‌های E وجود داشته باشد.

یك همسایگی به‌دلخواه کـوچك P درحالت یك مجموعـهٔ خطی، عبارتست از بخشی از این مجموعه، شامل نقطه‌های واقع درسمت‌راست و چپ نقطهٔ P، به‌قسمی‌که فاصلهٔ آنها تا نقطهٔ P، از هـر عدد مثبت مفروض ε کوچکتر باشد.

۲. چند مثال

الف) مجموعهٔ نقطه‌های با مختصات درست خط عددی، دارای نقطهٔ انباشتگی نیست.

ب) هر نقطهٔ دلخواه از مجموعهٔ نقطه‌های‌گویا را می‌توان یك‌نقطهٔ انباشتگی از این مجموعه دانست (بین هردو نقطهٔ گـویای به‌قدر دلخواه نزدیك به‌هم، همواره نقطه‌های گویای دیگری وجـود دارد. مثلاً واسطه عددی آنها).

پ) به‌همین ترتیب، هر نقطه از مجموعهٔ نقطه‌هـای حقیقی، و هر نقطه از مجموعهٔ نقطه‌های‌گنگ، نقطهٔ انباشتگی‌آن مجموعه خواهدبود.

ت) نقطهٔ O یک نقطهٔ انباشتگی ازمجموعهٔ $P_1=\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ است، اگرچه این نقطه عضوی از P_1 نیست.

ث) همچنین نقطهٔ ۱، نقطهٔ انباشتگی مجموعهٔ $P_2=\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$ است، درحالی‌که این نقطه به P_2 تعلق ندارد.

ج) مجموعهٔ

$$P_3=\left\{1, \frac{5}{4}, \frac{11}{9}, \frac{19}{16}, \ldots\right\}=$$

$$=\left\{x \middle| x=\frac{n^2+n-1}{n^2},\ n=1, 2, 3, \ldots\right\}$$

نقطهٔ ۱ را به‌عنوان نقطهٔ انباشتگی می‌پذیرد که ضمناً عضو P_3 است.

چ) مجموعهٔ $P_4=\left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots\right\}$ دارای نقطه‌های انباشتگی ۱ و ۱ − است، و هیچکدام از این دونقطه متعلق به P_4 نیستند.

۳. نقطه‌های فشردگی

می‌گویند نقطهٔ P، یک نقطهٔ فشردگی (یا نقطهٔ تراکم) از مجموعهٔ E است، به‌شرطی‌که در هر همسایگی به‌دلخواه کوچک P، تعداد ناشمارائی از نقطه‌های E وجود داشته باشد.

هرنقطهٔ فشردگی، یک نقطهٔ انباشتگی است، ولی به‌عکس، یک نقطهٔ انباشتگی، ممکن است نقطهٔ فشردگی نباشد.

۴. چند مثال

هر نقطهٔ حقیقی، یک نقطهٔ فشردگی از مجموعهٔ نقطه‌های حقیقی است.

هرنقطه از مجموعهٔ نقطه‌های گویا، نقطهٔ انباشتگی این مجموعه است، ولی هیچکدام ازآنها نقطهٔ فشردگی این مجموعه نیست.

تمرین

۱. نقطه‌های انباشتگی مجموعهٔ جوابهای

$$X=\left\{x \middle| x^{2}-\frac{n+3}{2n}x+\frac{n+1}{2n^{2}}=0\right\}$$

را وقتی‌که n مجموعهٔ عددهای درست را قبول می‌کند، پیدا کنید.

۲. مجموعه‌هایی را نشان دهید که نقطهٔ انباشتگی نداشته باشند.

۳. آیا مجموعهٔ جوابهای $X=\{x|x^{2}>1\}$، دارای نقطه‌های انباشتگی است؟ نقطه‌های فشردگی چطور؟

§۲۶. قضیهٔ بولزانو ـ وایرشتراس

۱. صورت قضیه

مجموعه‌های متناهی دارای نقطهٔ انباشتگی نیستند. برای مجموعه‌های نامتناهی، قضیهٔ بولزانو ـ وایرشتراس[1] می‌گوید:

هر مجموعهٔ نامتناهی کرانه‌دار، دست کم دارای یك نقطهٔ انباشتگی است.

یك مجموعهٔ خطی را کرانه‌دار گویند، وقتی‌که بتواند کاملاً در داخل یك فاصلهٔ بسته جای گیرد.

۲. اثبات

روند فاصله‌های تو در تو، می‌تواند راهنمائی برای یك اثبات نسبتاً ساده باشد. B را مجموعه‌ای نامتناهی وکرانه‌دار می‌گیریم. وسط فاصلهٔ بسته‌ای که شامل مجموعهٔ B است، B را به‌دو زیر مجموعه تقسیم

---

۱. برنهارد بولزانو Bernhard Bolzano (۱۷۸۱–۱۸۴۸)، کارل‌تئودور ـ وایرشتراس Krnl Theodor Weierstrass (۱۸۱۵–۱۸۹۷).

می‌کنند. دست‌کم، یکی از این دو زیر مجموعه، شامل بی‌نهایت نقطه است. این زیر مجموعه را B_1 می‌نامیم. وسط نیم فاصلهٔ بستهٔ شامل B_1 نیز، B_1 را به‌دو زیر مجموعه تقسیم می‌کندکه دست‌کم یکی از آنها، دارای بی‌نهایت نقطه است. با ادامهٔ این روش، به‌تدریج، به‌فاصله‌ای می‌رسیم که به‌دلخواه کوچك وضمناً شامل بی‌نهایت نقطه از مجموعهٔ اصلی است. وجود چنین فاصله‌ای، به‌معنای اثبات قضیه است.

مجموعهٔ نقطه‌های به‌مختصات درست خط عددی، نامتناهی است ولی‌کرانه‌دار نیست ونقطهٔ انباشتگی ندارد.

همهٔ مجموعه‌های P_1، P_2، P_3 و P_4ـ که قبلاً دربارهٔ آنها صحبت کرده‌ایم ـ هم دارای نقطهٔ انباشتگی هستند و هم کرانه دارند (روشن است که یك مجموعه ممکن است شامل نقطه‌های انباشتگی باشد، ولی کرانه‌دار نباشد).

تمرین

۱. مجموعه‌های مناسبی از نقطه‌ها را اختیارکنید و نشان دهیدکه:

$$(1+\eta).n=1+\eta$$

۲. به‌همان طریق نشان‌دهیدکه: $(\lambda+1).n=\lambda+1$.

۳. ثابت کنیدکه هر مجموعهٔ ناشمارا، دست کم دارای یك نقطهٔ انباشتگی است.

IX. مجموعه‌های ویژه

§۲۷. مجموعه‌های بسته، متمایز وکامل

۱. مجموعهٔ بسته

الف) مجموعه‌ای را بسته گویند که شامل همهٔ نقطه‌های انباشتگی

خودش باشد.

چند مثال

ـ مجموعهٔ $P_1=\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ بسته‌نیست، زیرانقطهٔ ۰، که‌نقطهٔ انباشتگی آن است، به P_1 تعلق ندارد.

ـ مجموعهٔ $P_2=\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$ بسته نیست، زیرا نقطهٔ‌انباشتگی آن ۱، به P_2 متعلق نیست.

ـ مجموعهٔ $P_3=\{1, \frac{5}{4}, \frac{11}{9}, \frac{19}{16}, \frac{29}{25}, \dots\}$ بسته است، زیرا تنها نقطه انباشتگی آن، ۱، متعلق به‌مجموعه است.

ـ مجموعهٔ $P_4=\{+\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, +\frac{3}{4}, \dots\}$ بسته‌نیست، درحالی‌که مجموعهٔ $P_5=\{+1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$، بسته است.

ـ مجموعهٔ نقطه‌های یک‌فاصلهٔ باز بسته‌نیست، زیرا نقطه‌های a وb، نقطه‌های انباشتگی مجموعهٔ $]a, b[$ هستند، ولی متعلق به‌مجموعه‌نیستند.

ب) مجموعهٔ نقطه‌های انباشتگی یک مجموعهٔ E را، مجموعهٔ مشتق E یا مشتق E می‌نامند و با E' نشان می‌دهند.

$\acute{E}$ می‌تواند تهی باشد، مثلاً مجموعهٔ مشتق‌یک مجموعهٔ متناهی، یا مشتق مجموعهٔ نقطه‌های با مختصات درست خط عددی، مجموعه‌ای تهی است.

یک مجموعه بسته است، وقتی‌که شامل مشتق خود باشد.

$E \Longleftrightarrow E' \subseteq E$ بسته است.

مجموعهٔ مشتق، یک مجموعهٔ بسته است.

اثبات. اگر E' مجموعه مشتق E و P یک نقطهٔ انباشتگی E' باشد، در یک همسایگی دلخواه P، به‌تعداد نامتناهی از نقطه‌های E' وجود دارد. همهٔ این نقطه‌ها، نقطهٔ انباشتگی E هستند و بنابراین درهمسایگی

مورد نظر، به‌تعداد نامتناهی از نقطه‌های E وجود دارد. درنتیجه، P یك نقطهٔ انباشتگی E است و به E' تعلق دارد.

برای هر مجموعهٔ E داریم: $E' \subseteq E$.

۲. مجموعهٔ متمایز

الف) مجموعهٔ E را متمایز گویند وقتی‌که بین هر دو نقطهٔ دلخواه از E، دست‌کم یك نقطهٔ متعلق به E وجود داشته باشد.

دریك مجموعهٔ متمایز، هیچ نقطه‌ای دارای نقطهٔ بلافاصله قبل، یا بلافاصله بعد نیست.

چند مثال

ـ مجموعهٔ نقطه‌های حقیقی، یامجموعهٔ نقطه‌های گویا ازیك خط‌عددی، یا از یك فاصلهٔ باز یا بسته از این خط متمایز است.

ـ مجموعهٔ $P_۲ = \{\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \ldots\}$، متمایز نیست.

ب) یك مجموعهٔ متمایز ، جز با یـك مجموعهٔ متمایز دیگر ، نمی‌تواند یکدیسه باشد.

فرض می‌کنیم، X یك مجموعهٔ متمایز و Y یك مجموعه غیرـ متمایز و $y_۱$ و $y_۲$ دونقطهٔ همسایه از Y باشد ($y_۱$ بلافاصله قبل‌از $y_۲$). اگر X و Y یکدیسه بـاشند، نقطه‌های $x_۱$ و $x_۲$، نظیر $y_۱$ و $y_۲$، هم همسایه می‌شوند. و این برخلاف فرض متمایز بودن X است.

پ) مجموعه‌های متمایز و شمارا، که دارای عضو اول و عضو آخر نباشند، یکدیسه هستند وگونهٔ ترتیب‌آنها، چنین است:

$$\eta = \operatorname{ord} \overline{Z} = \operatorname{ord} \{\ldots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \ldots\}$$

وقتی‌که دومجموعه یکدیسه باشند، یا هـر دو دارای عضو اول (یا عضو آخر) هستند، و یا هیچکـدام دارای عضو اول (یا عضو آخر) نیستند. ازاینجا نتیجه می‌شودکه دومجموعهٔ متمایز شمارا، دارای‌یکی

از چهارگونهٔ ترتیب زیر هستند:

$$\eta, \ 1+\eta, \ \eta+1, \ 1+\eta+1$$

۳. مفهوم نقطهٔ منفرد

یك نقطه از مجموعهٔ E را منفرد گویند، وقتی که به‌مشتق مجموعهٔ E تعلق نداشته باشد.

اگر هیچ نقطه‌ای از مجموعهٔ E منفرد نباشد، همهٔ نقطه‌های این مجموعه، نقطه‌های انباشتگی‌هستند:

$$E \subseteq E' \Longleftrightarrow E$$ بدون نقطهٔ منفرد

چند مثال

الف) مجموعهٔ نقطه‌های حقیقی یا گویای خط عددی، یا یك فاصلهٔ باز یا بسته از این خط، نقطهٔ منفرد ندارد.

ب) مجموعهٔ بستهٔ $P=\{[0, 1], [2, 3]\}$، نقطهٔ منفرد ندارد، علاوه برآن، این مجموعه متمایز نیست، زیرا بین نقطه‌های ۱ و ۲ از P، هیچ نقطه‌ای از این مجموعه وجود ندارد.

۴. مجموعهٔ کامل

یك مجموعهٔ بسته، به‌شرطی که‌هیچ نقطهٔ منفرد نداشته باشد، مجموعهٔ کامل نامیده می‌شود.

هرمجموعهٔ‌کامل، شامل همهٔ نقطه‌های انباشتگی خودش است:

$$E = E' \Longleftrightarrow E \subseteq E' \wedge E' \subseteq E \Longleftrightarrow E$$ کامل است

یك مجموعهٔ کامل، برمشتق خود منطبق است.

چند مثال

الف) مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های خط عددی، یا یك فاصلهٔ بسته از این خط، مجموعه‌ای بسته است.

ب) مجموعهٔ نقطه‌های گویای خط عددی، یا یك فاصلهٔ باز از این

خط، مجموعه‌ای کامل نیست. این مجموعه‌ها متمایز و بدون نقطهٔ منفردند، ولی بسته نیستند. زیرا مشتق مجموعهٔ نقطه‌های گویا، عبارتست ازمجموعهٔ همهٔ نقطه‌های حقیقی. در همسایگی هر نقطهٔ گنگ، به‌تعداد نامتناهی از نقطه‌های گویا وجود دارد، مثلاً

$$۱/۴ < ۱/۴۱ < ۱/۴۱۴ < ۱/۴۱۴۲ < \sqrt{۲} < ۱/۴۱۴۳ < ۱/۴۱۵ < ۱/۴۲ < ۱/۵$$

پ) یک مجموعهٔ متناهی همواره بسته است و هرگز متمایز نیست و همهٔ نقطه‌هایش، نقطه‌های منفرد هستند، وبنابراین هرگز کامل نیست. مجموعهٔ مشتق یک مجموعهٔ متناهی، یک مجموعهٔ تهی است.

ت) هرمجموعهٔ خطی کامل، دارای قوت متصله است.

تمرین

۱. آیا مجموعهٔ $E = \{۰/۱, ۰/۰۱, ۰/۰۰۱, ...\}$ بسته است؟

۲. مجموعهٔ مشتق را در مجموعهٔ نقطه‌های فاصلهٔ $]۱, ۲[$ پیدا کنید.

۳. مجموعهٔ مشتق را در مجموعهٔ نقطه‌های گویای فاصلهٔ $[۱, ۲]$ تعیین کنید.

۴. آیا مجموعهٔ نقطه‌های گویای فاصلهٔ $[۲, ۳]$ بسته است؟

۵. آیا مجموعهٔ تمرین قبل متمایز است؟

۶. آیا این مجموعه، نقطهٔ منفرد ندارد؟

۷. آیا مجموعهٔ مشتق این مجموعه بسته است؟ متمایز است؟

۸. آیا مجموعهٔ مشتق یک مجموعهٔ نامتناهی کامل است؟

§۲۸. مجموعه‌های پیوسته

۱. مفهوم بریدگی

در سال ۱۸۷۲ میلادی، ددکیند ریاضی‌دان آلمانی، مفهوم بریدگی را برای مجموعه‌های مرتب نقطه‌ها (و در نتیجه، هرمجموعهٔ

مرتب عددی) به‌میان کشید.

می‌گویند که دو مجموعهٔ نا تهی E_1 و E_2، در مجموعهٔ E، بریدگی به‌وجود می‌آورند (و با علامت $E_1|E_2$ نشان می‌دهند)، به‌شرطی که‌هر نقطه از E تنها به یکی از دو مجموعهٔ E_1 و E_2 تعلق داشته باشد و ضمناً همهٔ نقطه‌های E_1 مقدم برهمهٔ نقطه‌های E_2 باشند.

به‌این ترتیب، یك بریدگی درمجموعهٔ کاملاً مرتب E، به‌کمك مجموعهٔ رابطه‌های زیر، تعریف می‌شود:

$$E_1 \neq \varnothing,\ E_2 \neq \varnothing,\ E_1 + E_2 = E,\ E_1 \cap E_2 = \varnothing$$

اگر در یك مجموعهٔ E، بریدگی ایجاد شود، چهار حالت ممکن است پیش‌آید:

الف) E_1 دارای یك عضوآخری d_1 و E_2 دارای یك عضو اولی p_2 است. چنین بریدگی را شکاف مجموعهٔ E گویند. بین d_1 و p_2 هیچ عضو دیگری از E وجود ندارد و E درجای بریدگی، متمایز نیست.

ب) E_1 دارای یك عضوآخری است، ولی E_2 عضو اول ندارد.

پ) E_1 دارای عضوآخر نیست، ولی E_2 عضو اول دارد.

درحالت‌های ب) و پ) بریدگی را پیوسته گویند.

ت) E_1 دارای عضو آخر و E_2 دارای عضو اول نیستند. در این حالت، بریدگی را رخنه گویند.

۲. چند مثال

الف) مجموعهٔ $E=\{[۰،۱]،[۲،۳]\}$ دارای یك شکاف بین نقطه‌های ۱ و ۲ است.

ب) در مجموعهٔ Q، عددهای گویای مجموعهٔ $[۱،۳]$، نقطهٔ ۲، یك بریدگی پیوسته را مشخص می‌کند و افراز Q به دو طریق ممکن است:

یا $Q_1=[۱،۲]$ و $Q_2=]۲،۳]$،

یا $]۱, ۲[$ $Q_1 =$ و $[۲, ۳]$ $Q_2 =$.

پ) برای همان مجموعهٔ Q، نقطهٔ $\sqrt{۲}$، که به‌این مجموعه تعلق دارد، یك رخنه را مشخص می‌کند: Q_1 دارای عضو آخر و Q_2 دارای عضو اول نیستند.

۳. مفهوم مجموعهٔ پیوسته

الف) یك مجموعه را پیوسته گویند، وقتی که همهٔ بریدگی‌های آن پیوسته باشد.

یك مجموعهٔ پیوسته، نه شکاف دارد و نه‌رخنه. همان‌طـور که دیدیم، مجموعهٔ Q عددهای‌گویا، شکاف ندارد، ولی دارای بی‌نهایت رخنه‌است. مجموعهٔ عددهای‌گویا، مجموعه‌ای متمایز است، با این‌حال تعداد رخنه‌های‌آن ـ که متناظر با نقطه‌های گنگ هستند ـ ناشمارا‌ست. به‌این ترتیب، مجموعهٔ‌عددهای‌گویا، با وجودی‌که متمایز است، پیوسته نیست.

ب) تعریف یك نگاشت دوسوئی، از مجموعهٔ عـددهـای حقیقی به‌روی مجموعهٔ نقطه‌های یك خط، بـدون وارد کـردن عددهای گنگ، ممکن نیست. وقتی که تنها عدهای گویا را در نظر بگیریم، می‌توان به هرکدام از این عددها، نقطه‌ای از خط عددی را نظیر کرد (نقطه‌های گویا). ولـی عکس این عمل ممکن نیست، مثلاً اگـر مربعـی به ضلع واحد را درنظر بگیریم که قطرآن برخط عددی، و یکی از رأس‌های‌آن برنقطهٔ O منطبق باشد، اگر $\sqrt{۲}$ را به‌وسیلهٔ بریدگی $Q_1 | Q_2$:

$$Q_1 = \{x \in Q \mid x^۲ < \sqrt{۲}\},\ Q_2 = \{x \in Q \mid x^۲ > ۲\}$$

به‌حساب نیاوریم، انتهای قطر مربع در روی خط عددی، متناظرباهیچ عددی نخواهد شد.

۴. مشخص کردن مهمترین گونه‌های ترتیب

الف) در§ ۲۷ ثابت‌کردیم که همهٔ مجموعه‌های متمایز و شمارا،

دارای گونهٔ ترتیب η هستند، که عبارتست از گونهٔ ترتیب مجموعهٔ نقطه‌های گویای خط عددی یا یك فاصلهٔ باز از این خط. این ویژگی به‌ما امکان می‌دهد که بتوانیم همهٔ مجموعه‌های باگونهٔ ترتیب η را به‌کمك ویژگی‌های زیر، تعریف کنیم. این مجموعه‌ها

a) شمارا هستند،

b) متمایزند،

c) نه‌عضو اول دارند و نه‌عضو آخر.

کانتور ثابت کرده است که همین‌سه شرط، شرطهای لازم و کافی را، برای اینکه یك مجموعهٔ کاملاً مرتب دارای گونهٔ η باشد، تشکیل می‌دهند.

ب) گونهٔ ترتیب مجموعهٔ‌عددهای حقیقی یك فاصلهٔ‌بسته، ومثلاً فاصلهٔ [۱ ،۰]، را ϑ می‌نامیم.

کانتور همچنین ثابت کرده است که شرطهای زیر، برای اینکه یك مجموعهٔ E دارای گونهٔ ترتیب ϑ باشد، لازم و کافی است:

a) مجموعهٔ E شامل یك مجموعهٔ متمایز و شمارای D باشد، به‌نحوی که هردو نقطهٔ دلخواه از E، دست‌کم به‌وسیلهٔ یك نقطه از D متمایز باشد.

b) مجموعهٔ E پیوسته باشد.

c) مجموعهٔ E دارای یك‌عضو اول ویك عضوآخر باشد. ازآنجا که ϑ یك گونهٔ ترتیب از یك مجموعهٔ بسته است، گونه‌های ترتیب $\vartheta+\vartheta$ ،$\vartheta+\vartheta+\vartheta$ ،$\vartheta.n$ ،$\vartheta.\omega$، باهم فرق دارند.

مثال: مجموعهٔ {[۴ ،۳] ،[۲ ،۱]}، با داشتن شکاف ۳ | ۲، دارای گونهٔ ترتیب $\vartheta+\vartheta$ است.

پ) λ را گونهٔ ترتیب مجموعهٔ حقیقی‌های خط عددی یا یك فاصلهٔ باز از این خط می‌گیریم. برای آنکه یك مجموعهٔ E دارای گونهٔ

ترتیب λ باشد، لازم و کافی است که در ویژگی‌های زیر صدق کند:

a) مجموعهٔ E شامل یك مجموعهٔ متمایز و شمارای D باشد، به نحوی که هردو نقطهٔ دلخواه E، دست‌کم بایك نقطه از D متمایز باشد.

b) مجموعهٔ E نه عضو اول داشته باشد و نه‌عضو آخر.

گونهٔ ترتیب λ، در رابطه‌های زیر صدق می‌کند:

$$۱+\lambda+۱=\vartheta \,،\, \lambda+۱+\lambda=\lambda$$

چند مثال

$$\{۱\}+\{]۱،۲[\}+\{۲\}=\{[۱،۲]\}$$
$$\{]۱،۲[\}+\{۲\}+\{]۲،۳[\}=\{]۱،۳[\}$$

گونهٔ ترتیب $\lambda+\lambda$ باگونهٔ ترتیب λ فرق دارد. مثلاً مجموعهٔ $\{]۱،۲[،]۲،۳[\}$، درنقطهٔ ۲، دارای یك رخنه است و پیوسته نیست وگونهٔ ترتیبش $\lambda+\lambda$ است. برعکس $\eta+\eta=\eta$، زیرا مثلاً مجموعهٔ نقطه‌های گویای فاصلهٔ $]۱،۳[$، بعد از حذف ۲، بازهم متمایز، باز و شمارا باقی می‌ماند.

روشن است که همهٔ ویژگی‌های یك مجموعهٔ E ـ بسته بودن، متمایز بودن، نقطهٔ منفرد نداشتن یا کامل بودن ـ درمورد مجموعه‌های یکدیسهٔ E هم دارای ارزش‌اند.

تمرین

۱. ثابت کنید که عدد $\sqrt{۲}$ گویا نیست، یعنی به‌ازای مقادیر درست m و n داریم: $\frac{m}{n}\neq\sqrt{۲}$.

۲. طبیعت بریدگی که به‌وسیلهٔ $\sqrt{۵}$ درمجموعهٔ عددهای گویا مشخص می‌شود، کدام است؟

۳. همینطور طبیعت بریدگی به‌وسیلهٔ $\sqrt{۶}$ در

الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی،

ب) مجموعهٔ عددهای گویا،

پ) مجموعهٔ عددهای حقیقی؟

۲۹§. نوسان و پیوستگی یک تابع

۱. مفهوم تابع

یك نگاشت یا یك تابع $y=f(x)$ را، همچون یك تناظر یك سوئی بین عضوهای مجموعهٔ X (آرگومان‌ها = آوندها) و عضوهـای مجموعهٔ Y (مقدارهای تابع) تعریف می‌کنیم. وقتی که این تناظر دوسوئی باشد، با یك نگاشت دوسوئی سر و کار خواهیم داشت. اگر X، مجموعهٔ آوندهای یك تابع باشد، گویند که این تابع روی مجموعهٔ Y تعریف شده است.

چند مثال

الف) تابع $y=f(x)=x^2$ و مجموعهٔ آوندهای

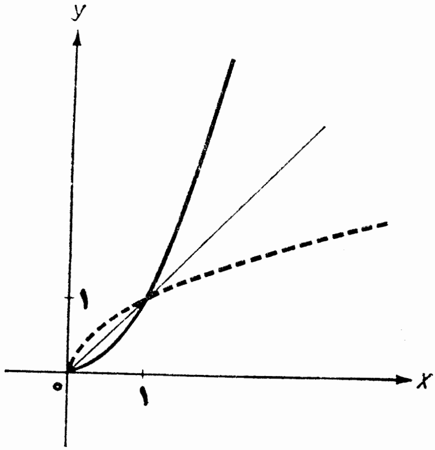
$$X=\{x\,|\,x\in R \wedge x\geqslant 0\}$$

را در نظر می‌گیریم. دراین صورت، مجموعهٔ مقادیر تابع عبارتست از

$$Y=\{y\,|\,y\in R \wedge y\geqslant 0\}$$

نمودار این تابع روی شکل ۳۳ داده‌شده است. تابع معکوس آن، عبارتست از $x=\varphi(y)=\sqrt{y}$ (درآنالیز $\sqrt{y}$، معرف عدد مثبت x است به‌قسمی که داشته باشیم: $x^2=y$). روی شکل ۳۳، نمودار تابع $x=b(y)$ را با نقطه‌چین داده‌ایم. نمودار یك تابع و نمودار تابع معکوس آن همیشه نسبت به نیمساز ربع اول قرینهٔ یکدیگرند.

ب) همان تـابع و مجموعـهٔ آوندهای $X=\{x\,|\,x\in R\}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت، مجموعهٔ مقادیر تابع عبارتست از $Y=\{y\,|\,y\in R \wedge y\geqslant 0\}$. ولی تابعی که به‌این‌ترتیب تعریف شود، دارای تابع معکوس نیست، زیرا به‌هر مقدار y، دومقدار x نظیر می‌شود (شکل ۳۴).

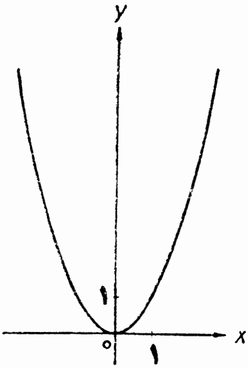


شکل ۳۳. نمودار تابع

$(x \geqslant 0)\ y = x^2$

و تابع معکوس آن

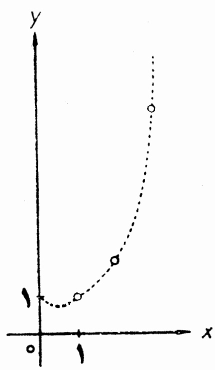
$y = \varphi(x) = \sqrt{x}$



شکل ۳۴. نمودار تابع

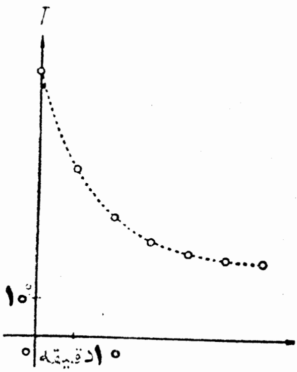
$y = x^2$

پ) تابع $y = f(x) = x!$ را درنظر می‌گیریم. این تابع، به‌مجموعهٔ عزیمت $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$، مجموعهٔ مقادیر $Y = \{1, 2, 6, 24, \ldots\}$



شکل ۳۵. نمودار تابع

$.(x \in N)\ y = x!$



شکل ۳۶. نمودار رشته اندازه‌های

$T = f(t)$

را نظیر می‌کند (شکل ۳۵).

یادداشت. اگر تابع گاما را با رابطهٔ $\Gamma(x)=\int_{0}^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1} dt$

تعریف کنیم، این امکان را پیدا می‌کنیم که تابع $y=x!$ را به‌ازای هر عدد حقیقی x تعریف کنیم. درحالتی‌که x عدد درستی باشد، همیشه به‌دست می‌آید: $\Gamma(x)=x!$. نمودار تابع گاما روی شکل ۳۵، به‌صورت نقطه‌چین نشان‌داد شده است.

ت) آب گرم را در محیطی سرد قرار می‌دهیم و درجهٔ حرارت آب‌را، هر ده‌دقیقه‌اندازه می گیریم. فرض کنیم که نتیجه‌این‌اندازه گیری‌ها، چنین‌باشد:

t(دقیقه)	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰
$T(C^\circ)$	۷۱/۲	۴۵/۶	۳۲/۸	۲۶/۴	۲۳/۲	۲۱/۶	۲۰/۸

تابع دوسوئی $T=f(t)$، به‌مجموعه $t=\{۰، ۱۰، ۲۰، ...، ۶۰\}$، مجموعهٔ $T=\{۷۱/۲، ۴۵/۶، ...، ۲۰/۸\}$ را نظیر می‌کند. اگر فرض شود که تابع همهٔ مقادیر بینابینی بین دو مقدار تجربی را اختیار می‌کند، یك تابع «انترپولاسیون» تعریف می‌شود که روی‌شکل ۳۶، با نقطه‌چین‌نشان داده شده است.

۲. تابع‌های‌کرانه‌دار. نوسان یك تابع

فرض می‌کنیم تابع $y=f(x)$، روی یك مجموعهٔ X تعریف شده باشد.

اگر مجموعهٔ Y، مقادیر تابع، کاملاً در فاصلهٔ باز $]a، b[$، یافاصلهٔ بستهٔ $[a، b]$ گنجیده باشد، گویند که این تابع کرانه‌دار است: b کران‌بالا و a کران پایین آن به‌حساب می‌آید.

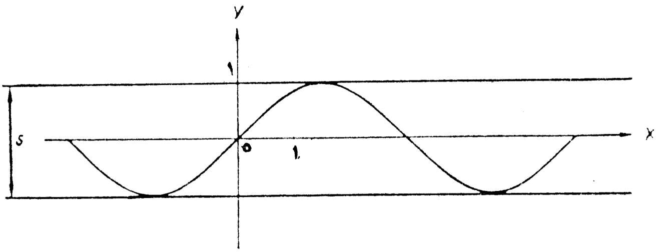
درحالتی‌که a و b متعلق به‌مجموعهٔ مقادیر تابع باشد، صحبت از ماکزیمم و می‌نیمم تابع به‌میان می‌آید.

مقدار مثبت $s=|b-a|$، طول فاصلهٔ $[a،b]$، را نوسان تابع

روی مجموعهٔ تعریف X گویند.

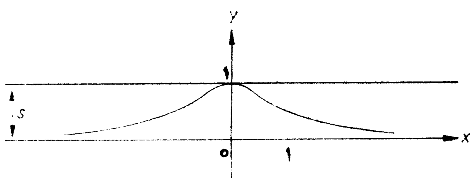
چند مثال

الف) اگر مجموعهٔ $y=f(x)=\sin x$، روی مجموعهٔ $X=\{x \mid x\in R\}$ تعریف شده باشد، مجموعهٔ $Y=\{[-۱ ، +۱]\}$، عبارتست از مجموعهٔ مقادیر این تابع. این مجموعه کرانه‌دار است. ماکزیمم آن $+۱$ و می‌نیمم آن -۱، و نوسان آن برابر $s=۲$ است (شکل ۳۷).



شکل ۳۷. نمودار تابع کرانه‌دار $y=\sin x$

ب) تابع $y=f(x)=\frac{۱}{۱+x^۲}$ را روی مجموعهٔ عددهای حقیقی تعریف می‌کنیم. مجموعهٔ مقادیر این تابع عبارتست از $Y=\{]o ، ۱]\}$.
کران‌های تابع عبارتست از o و ۱ و نوسان آن $s=۱$ (شکل ۳۸).



شکل ۳۸. نمودار تابع کرانه‌دار $y=\frac{۲}{۱+x^۲}$

۳. تابع‌های پیوسته

الف) تابع $y=f(x)$ را در نقطهٔ x_o پیوسته گویند، وقتی که نوسان

تابع در یك همسایگی $V=\{x \mid x\in R \wedge x_0-\epsilon < x < x_0+\epsilon\}$ بتواند با انتخاب مناسب ϵ، به‌قدر دلخواه کوچك شود.

همچنین می‌توان گفت: تابع $y=f(x)$ درنقطهٔ x_0 پیوسته است، اگر نوسان آن در فاصلهٔ $]x_0, x[$، وقتی‌که x به‌سمت x_0 میل کند، به سمت صفر میل کند.

تحقیق شده است‌که این تعریف‌ها، با تعریف‌هائی‌که در §۴.۱۷ داده شده است، سازگارند.

چند مثال

الف) تابع $y=f(x)$ را به‌این ترتیب تعریف می‌کنیم:

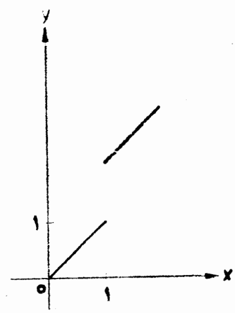
روی $X_1=\{]0, 1[\}$ با $y=f_1(x)=x$

و روی $X_2=\{]1, 2[\}$ با $y=f_2(x)=1+x$ (شکل ۳۹).

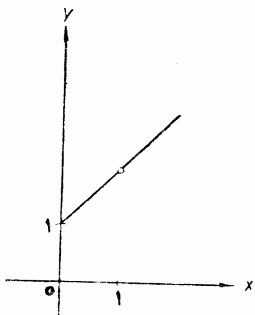
این تابع درنقطهٔ $x_0=1$ ناپیوسته است، زیرا

$$\lim_{x\to 1} f_1(x)=1 ,\quad \lim_{x\to 1} f_2(x)=2 ,\quad \lim_{x\to 1} s=1$$

ب) تابع $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ باحوزهٔ‌تعریف $X=\{[0, 2]\}$ رادرنظرمی گیریم.



شکل ۳۹ تابع $y=f(x)$
درنقطهٔ $x_1=1$ ناپیوته است



شکل ۴۰. تابع $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$
درنقطهٔ $x=1$ دارای‌یك‌ناپیوستگی
نابنیادی است

این تابع درنقطهٔ $x = 1$ پیوسته نیست، زیرا اگر $f(1) = 3$ بگیریم خواهیم داشت $\lim_{x\to 1} s = 1$، درحالی‌که اگر $f(1)$ را برابر با مقدار حدی تابع‌در این نقطه بگیریم.

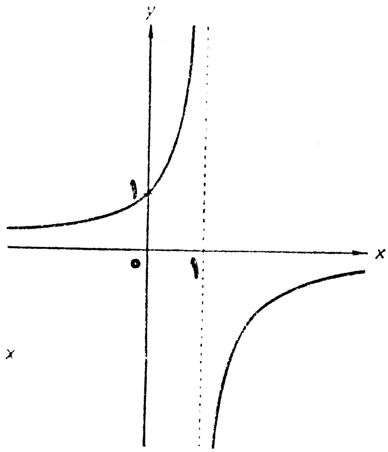
$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

ناپیوستگی رفع می‌شود. درچنین صورتی می‌گویند که تابع با پیوستگی در نقطهٔ ۱ تعریف شده است.

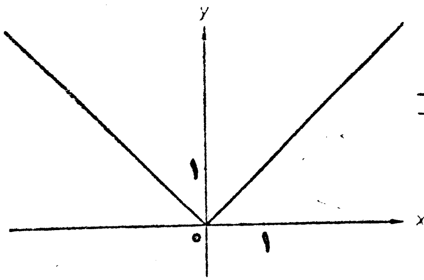
به‌گفتهٔ ریمان[1]، ناپیوستگی ازاینگونه، یك ناپیوستگی نابنیادی است (شکل ۴۰).

ب) به‌کمك قضیه‌های زیر، می‌توان رفتار یك تابع پیوسته را مورد بررسی قرارداد.

وقتی که تابعی روی یك فاصله پیوسته باشد، همهٔ مقادیر واقع‌بین دو مقدار دلخواه خود را قبول می‌کند.



شکل ۴۱. تابع $y = \frac{1}{1-x}$ درنقطهٔ $x_1 = 1$ دارای یك ناپیوستگی است.



شکل ۴۲. تابع $y = |x|$ همه‌جا پیوسته است، ولی درنقطه $x = 0$ مشتق ندارد.

1. Bernhard Riemann (1826 – 1866).

چند مثال

الف) تابع $y=f(x)=\frac{۱}{۱-x}$ روی مجموعهٔ عزیمت $X=\{[۰،۲]\}$ تعریف‌شده است. این تابع کرانه‌دار نیست، بنابراین برای همهٔ نقطه‌های مجموعهٔ آوندها پیوسته نیست (عملاً نقطهٔ $x=۱$، یك نقطهٔ ناپیوستگی است (شکل ۴۱)).

ب) تابع $y=f(x)=|x|$، در هر نقطهٔ حقیقی پیوسته است (شکل ۴۲) و در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست.

تمرین

۱. تحقیق کنید که نقطه‌های تابع تجربی شکل ۳۶، در این معادله صدق می‌کنند:

$$T=f(t)=۲۰+۵۱/۲\times ۲^{-\frac{t}{۱۰}}$$

۲. آیا تابع $y=f(x)=\ln\frac{x^۲+۲}{x^۲-۱}$ برای $x\in R$ کرانه‌دار است؟

۳. نوسان تابع $y=f(x)=x^۲$ را روی فاصله‌های $]x-\varepsilon، x+\varepsilon[$ تعیین کنید، به‌شرطی که ε مقادیر ۰/۲، ۰/۰۲، ۰/۰۰۱ و x مقدار ۱را اختیار کند.

۴. مطلوبست تعیین ε به قسمی که نوسان تابع $y=f(x)=۵x-۸$ (که درهمه‌جا پیوسته است)، در نقطهٔ $x=۳$، از ۰/۰۱ کمتر شود.

۵. آیا تابع $y=f(x)=\frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-۱}$ درهمه‌جا پیوسته است؟

۶. آیا خارج قسمت دو تابع پیوسته، تابعی پیوسته است؟

۷. آیا نمودار یك ورقهٔ درجه حرارت می‌تواند مانندیك تابع‌پیوسته نمایش داده شود؟

§۳۰. مجموعه‌های نقطه‌های صفحه و فضا

۱. مجموعهٔ نقطه‌های صفحه

الف) دربندهای ۲۴ تا۲۸، مجموعه‌های‌خطی را موردبررسی قرار دادیم. دربند ۲۹ چند مجموعهٔ یک بعدی از مجموعهٔ نقطه‌های صفحهٔ دکارتی را بررسی کردیم. مجموعهٔ زوج‌های

$$C=\{(x،y) \mid x، y\in R\}$$

شامل همهٔ نقطه‌های این صفحه است. ما از مجموعهٔ C، به‌کمك یك رابطهٔ تابعی $C=\{(x،y) \mid x،y\in R \wedge y=f(x)\}$، مجموعه‌های یك بعدی را درآوردیم، که همان نمودارهای این‌تابع‌ها هستند. دراین‌بند، به‌خصوص، فصل مشترك‌های مجموعه‌های یك بعدی و سپس مجموعه‌ـ های دوبُعدی و روش‌های مختلف همراه کردن این مجموعه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

ب) خط $D_۱$ شکل ۴۳، نمودار مجموعهٔ زوج‌های

$$D_۱=\{(x،y) \mid y=۲x+۳\}$$

و خط $D_۲$ از همان شکل، نمودار مجموعهٔ زوج‌های

$$D_۲=\{(x،y) \mid y=-x\}$$

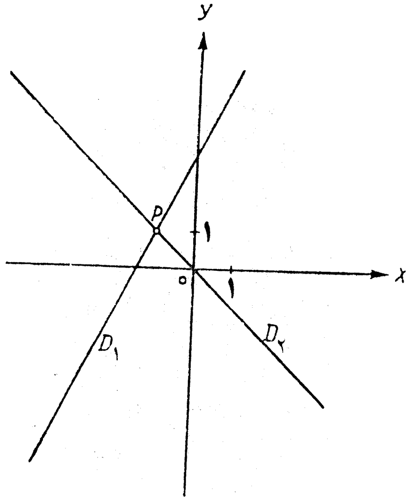
می‌باشد. اشتراك $D_۱\cap D_۲$، عبارتست ازمجموعهٔ $P=\{(-۱، +۱)\}$، که متناظر است با محل برخورد خط‌های $D_۱$ و $D_۲$. همچنین می‌توانیم بگوییم که $\{(-۱، +۱)\}$ عبارتست از مجموعهٔ جوابهای

$$S=\{(x،y) \mid y=۲x+۳ \wedge y=-x\}$$

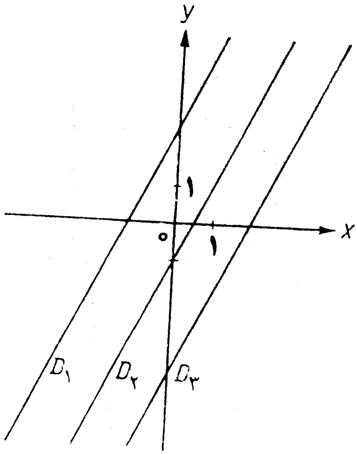
پ) اگر داشته باشیم:

$$D_۱=\{(x،y) \mid y=۲x-۱\} \text{ و } D_۲=\{(x،y) \mid y=۲x+۲/۵\}$$

خواهیم داشت: $D_۱\cap D_۲=\varnothing$ و خط‌های $D_۱$ و $D_۲$ متوازی‌اند (شکل



شکل ۴۳. اشتراک دو مجموعهٔ خطی از نقطه‌ها



شکل ۴۴. خطهای متوازی

۴۴). به همین ترتیب، مجموعهٔ $D_۳=\{(x،y) \mid y=۲x-۳\}$ هم، در نمودار خود، به‌صورت خطی موازی $D_۱$ و $D_۲$ درمی‌آید.

یادداشت. رابطهٔ توازی با علامت $\|$:

اولاً بازتاب است: $D_۱ \| D_۱$

ثانیاً متقارن است: $D_۱ \| D_۲ \Rightarrow D_۲ \| D_۱$

ثالثاً سرایت‌پذیر است: $D_۱ \| D_۲ \wedge D_۲ \| D_۳ \Rightarrow D_۱ \| D_۳$

ت) نمودار مجموعهٔ زوج‌های $C=\{(x،y) \mid x^۲+y^۲=۲۵\}$ عبارتست از دایرهٔ C شکل ۴۵؛ مجموعهٔ زوج‌های

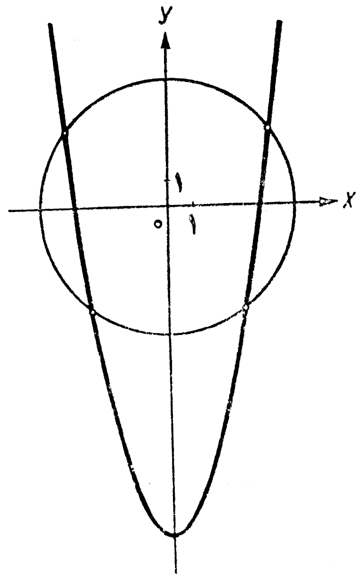
$$P=\{(x،y) \mid y=x^۲-۱۳\}$$

هم عبارتست ازسهمی P همان‌شکل. اشتراک $C\cap P$ عبارتست ازمجموعهٔ زوج‌های

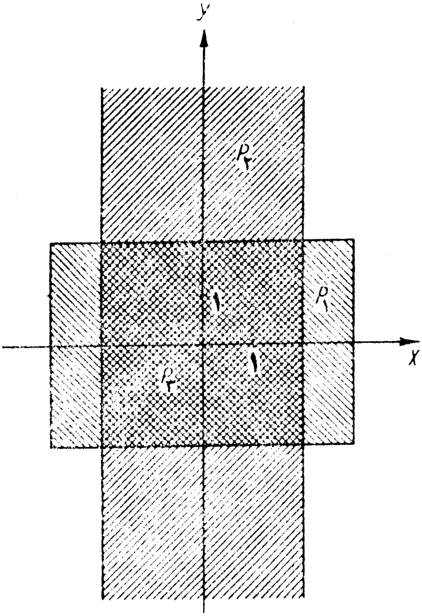
$$I=C\cap P=\{(-۴،۳)،(-۳،-۴)،(۳،-۴)،(۴،۳)\}$$

که می‌توان‌آن‌را با رابطهٔ زیر هم مشخص کرد:

$$I=\{(x،y) \mid x^۲+y^۲=۲۵ \wedge y=x^۲-۱۳\}$$



شکل ۴۵. فصل مشترک
یک دایره و یک سهمی



شکل ۴۶. مجموعهٔ نقطه‌های دو بعدی

به‌زبان دیگر، عضوهای I، عبارتند از جوابهای دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=x^2-13 \end{cases}$$

نمودار I عبارتست از مجموعه چهارنقطه، که بین C و P مشترک‌اند.

ث) مجموعهٔ زوج‌های $C_1=\{(x,y) \mid |x|<3 \wedge |y|<2\}$، عبارتست ازمجموعهٔ نقطه‌های درونی یک مستطیل(شکل۴۶)، ومجموعهٔ زوج‌های $C_2=\{(x,y) \mid |x|<2\}$، عبارتست از مجموعهٔ نقطه‌های یک نوار قائم (شکل۴۶). فصل مشترک C_1 و C_2، یعنی $C_1 \cap C_2$، عبارتست از مجموعهٔ نقطه‌های یک مربع، که درشکل ۴۶ به‌خوبی دیده می‌شود.

ج) شکل ۴۷، معرف مجموعه‌های زیر است:

$C_۱=\{(x،y)\mid ۴<x^۲+y^۲<۹\}$

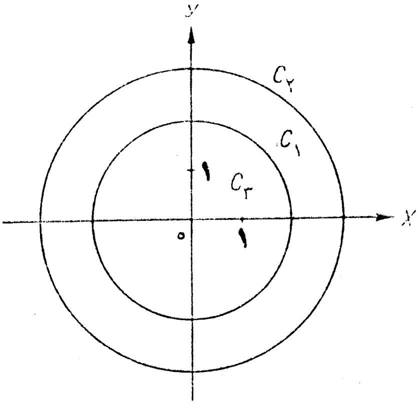
که عبارتست از مجموعهٔ نقطه‌های یك تاج دایره‌ای؛

$C_۲=\{(x،y)\mid x^۲+y^۲<۹\}$

که معرف مجموعهٔ نقطه‌های دایرهٔ بزرگتر است؛

$C_۳=\{(x،y)\mid x^۲+y^۲<۴\}$

که مجموعهٔ نقطه‌های دایرهٔ کوچکتر رانشان می‌دهد. داریم:



شکل ۴۷. مجموعهٔ نقطه‌های واقع در دایره‌ها و یك زوج دایره‌ای

$$C_۲=C_۱\cup C_۳،\ C_۲\cap C_۳=C_۳،\ C_۱\cap C_۳=\varnothing$$

۲. مجموعه‌های نقطه‌های فضا

الف) مجموعهٔ سه‌تائی‌های $T=\{(x،y،z)\mid x،y،z\in R\}$، مجموعهٔ نقطه‌های فضای سه بُعدی را نمایش می‌دهند. با یك رابطهٔ تابعی بین x، y و z به‌شکل $z=f(x،y)$، می‌توان یك حالت دوبُعدی (یك سطح) را تعریف کرد، یك تابع دو متغیرهٔ $z=f(x،y)$ می‌تواند یك نگاشت را از مجموعهٔ زوج‌های $(x،y)$ به روی مجموعهٔ مقادیر z، نمایش دهد. در حالتی که بین سه مختصات x، y و z، یك رابطهٔ خطی به‌صورت $z=ax+by+c$ وجود داشته باشد، مجموعهٔ

$$P=\{(x،y،z)\mid z=ax+by+c\}$$

معرف مجموعهٔ نقطه‌های یك صفحه خواهد بود. این معادله را می‌توان به‌صورت ضمنی $Ax+By+Cz+D=۰$ ویابه‌صورت مجموعی‌ازسه کسر $\frac{x}{x_۰}+\frac{y}{y_۰}+\frac{z}{z_۰}=۱$ هم نوشت.

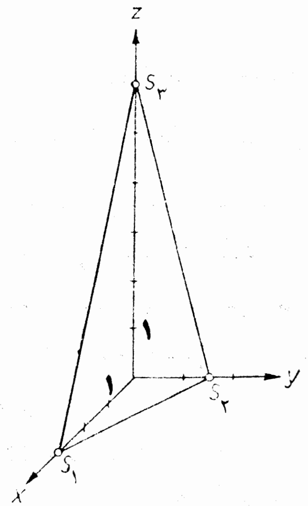
ب) مجموعهٔ سه‌تائی‌های

$T_1 = \{(x, y, z) \mid 2x + 4y + z - 6 = 0\}$،

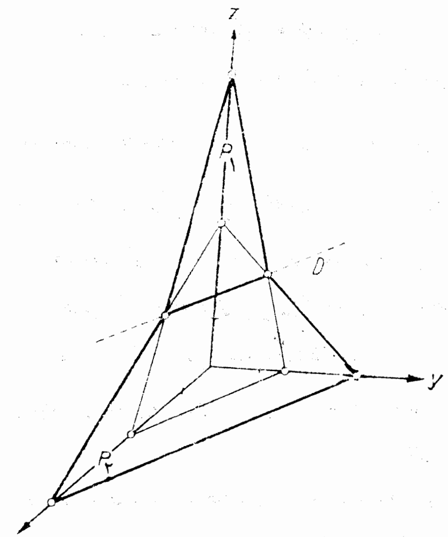
مجموعهٔ نقطه‌های صفحهٔ P_1 رانشان‌می‌دهد که معادلهٔ‌آن‌را می‌توان به‌این صورت هم نوشت:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{1/5} + \frac{z}{6} = 1$$

صفحهٔ P_1 محورهای مختصات را به‌ترتیب در نقطه‌های $S_1(3, 0, 0)$، $S_2(0, \frac{3}{2}, 0)$ و $S_3(0, 0, 6)$ قطع می‌کنند. شکل ۴۸، طرحی از این‌صفحه را، به‌کمك مثلث اثرهای آن روی سه صفحهٔ تصویر، نشان می‌دهد (روشن است‌که P_1 نامحدود است، ولی بخش‌هایی از آن‌که به وسیلهٔ صفحه‌های تصویر مخفی شده است، درشکل دیده نمی‌شود).



شکل ۴۸. نمایش یك صفحه با اثرهای آن روی صفحه‌های مختصات



شکل ۴۹. فصل مشترك دوصفحه

پ) مجموعهٔ سه‌تائی‌های $T_2=\{(x,y,z) \mid x+2y+2z=6\}$

مجموعهٔ نقطه‌های صفحهٔ P_2 را، به‌معادلهٔ $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$، نشان می‌دهد.

شکل ۴۹، صفحه‌های P_1 و P_2 را، با اثرهای آنها روی صفحه‌های مختصات نمایش می‌دهد. خط D عبارتست از فصل مشترك صفحه‌های P_1 و P_2 و مجموعهٔ نقطه‌های

$$D=T_1\cap T_2=\{(x,y,z) \mid 2x+4y+z=6 \wedge x+2y+2z=6\}$$

ویا به‌طور ساده‌تر، مجموعه

$$D=\{(x,y,z) \mid z=2,\ x+2y=2\}$$

مجموعهٔ اخیر به‌این معناست‌که D عبارتست از فصل مشترك صفحهٔ به معادلهٔ $z=2$ موازی صفحه xoy، و صفحهٔ به‌معادلهٔ $x+2y=2$ عمود بر این صفحه.

ت) مجموعهٔ نقطه‌های $S=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=169\}$، معرف سطح یك‌کره است. فصل مشترك مجموعهٔ S بامجموعهٔ نقطه‌های $P=\{(x,y,z) \mid z=5\}$، که صفحه‌ای است موازی xoy ، عبارتست از مجموعهٔ

$$C=P\cap S=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=169 \wedge z=5\}=$$
$$=\{(x,y,z) \mid z=5 \wedge x^2+y^2=144\}$$

C عبارتست از مجموعهٔ نقطه‌های واقع برمحیط یك دایره.

تمرین

۱. دومجموعهٔ $C_1=\{(x,y) \mid x=0\}$ و $C_2=\{(x,y) \mid y=0\}$ مفروض است. آیا $C_1\cap C_2$ تهی است؟

۲. الف) نمودارهای نظیر مجموعه‌های زوج‌های

$$C_1=\{(x,y) \mid y=x^2\} \text{ و } C_2=\{(x,y) \mid y=x+2\}$$

را رسم کنید.

ب) فصل مشترك این دو مجموعه را معین کنید.

۳. اجتماع و اشتراك مجموعه‌های زوج‌های زیر را پیدا کنید:

$D_1=\{(x,y) \mid x^2+y^2-2x<3\}$ و $D_2=\{(x,y) \mid x^2+y^2+2x<3\}$

۴. مطلوبست تعیین اشتراك همهٔ مجموعه‌های

$E_c=\{(x,y) \mid y=cx\}$

که درآن c عبارتست از يك عدد حقیقی.

۵. الف) مجموعهٔ جوابهای

$S=\{(x,y,z) \mid x+y+2z=4 \wedge x+y+z=4\}$

را تعیین کنید.

ب) طرحی برای نمایش مجموعه‌های

$T_1=\{(x,y,z) \mid x+y+2z=4\}$

$T_2=\{(x,y,z) \mid x+y+z=4\}$

و همچنین $S=T_1 \cap T_2$ راپیداکنید.

۶. مطلوبست تعیین شکل هندسی نظیر مجموعه

$P=\{(x,y) \mid |2x|+|y+1|<6\}$

شکل را رسم کنید.

بخش پنجم

ضمیمه‌ها

X. ادراك‌های بنیادی

§۳۱. پارادوکس‌های نظریهٔ مجموعه‌ها

۱. مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی که درموردهرکدام، خود مجموعه، عضوی ازهمان مجموعه است.

الف) از روی‌مفهوم مجموعهٔ متناهی، به‌مفهوم مجموعهٔ‌نامتناهی دست یافتیم و برای عمل‌کردن با این مجموعه‌ها، آنها را در مقوله‌ـ های مختلف، دسته‌بندی‌کردیم و به‌هرکدام از این مقوله‌ها یك «درجهٔ بی‌نهایت» یا عدد اصلی ترانسفینی، نسبت دادیم.

حالادیگر مامی‌توانیم به‌وسیلهٔ این‌عددها، در«آن‌سوی‌بی‌نهایت» محاسبه کنیم؛ این محاسبه‌ها با همان دقتی انجام می‌گیرد که به‌کمك تعریف‌ها و عمل‌های حساب مقدماتی، امکان داشتیم.

به‌این ترتیب، ما از مرز ناحیه‌ای گذشته‌ایم که می‌توان آن را نقطهٔ اجتماع همهٔ ضابطه‌های ریاضی دانست. درضمن می‌توان گفت‌که این وضع، به‌گسترش هرکدام از این ضابطه‌ها هم، کمك بسیار کرده است.

ما توانسته‌ایم با استفاده از نیروی خلاق ذهن آدمی، و «با

آزادی کامل»، اندیشه‌های تازه‌ای‌را بیافرینیم وازاین‌راه، ضمناًمرحله‌های پشت‌سرهم جستجوها وآفریده‌های خود را تثبیت کنیم.

ولی این اندیشه‌ها، همیشه باید ساده وروشن تعریف شده‌باشند، حتی اگر لازم باشدکه به‌خاطر تعداد زیادآنها، و به‌خاطر تمیز آنها از یکدیگر، احتیاط‌های فراوانی به‌کار بریم. «آزادی‌کاملی» که از آن برخورداریم، در هیچ حالتی نباید منجر به‌نوعی هرج و مرج ناشی از تناقض‌ها و پارادوکس‌ها بشود.

اگر مجموعه‌های تازه‌ای را درست کنیم که عضوهای آنها، خود مجموعه‌های دیگری باشد، به‌چنین پارادوکس‌هایی برخورد می‌کنیم. پارادوکس‌هایی‌که درجریان به‌وجود آمدن نظریهٔ مجموعه‌ها پیدا شد، با وجود فرعی بودنشان، چنان مزاحمتی ایجادکردندکه مدتها مانع از آن شدندکه این نظریه، به‌موقعیتی‌که امروز در ریاضیات دارد، برسد. با وجود این، هنوز هم راه حل قطعی درمورد این پرسش‌ها، پیدانشده است.

ما دراین‌کتاب، سعی‌کرده‌ایم، ازتعریف‌هایی‌که موجب پیدایش این پارادوکس‌ها بوده‌اند، دوری‌کنیم وتنها چندتا ازآنها را، به‌خاطر ارضای‌کنجکاوی، شرح می‌دهیم.

ب) مجموعهٔ M، شامل همهٔ مجموعه‌هایی که عضوی از خودشان نیستند، درنظر می‌گیریم. چنین مجموعه‌هایی وجود دارند وما تااینجا، به‌طورکلی، با اینگونه مجموعه‌ها سروکار داشته‌ایم. مجموعه‌هایی که تاکنون بررسی کرده‌ایم، عبارت بودند از مجموعهٔ اشیاء، عددها و نقطه‌ها، وبه‌ندرت با مجموعه‌ای از مجموعه‌ها برخوردکرده‌ایم.

تنها استثنائی که تا اینجا داشته‌ایم، مجموعهٔ $\mathscr{P}(E)$ بود، یعنی مجموعهٔ زیر مجموعه‌های E، که هرعضو آن خود یك مجموعه

است. ولی دراین مورد هم، این مجموعه، عضوی از خودش نیست. «وسیع»ترین عضو $\mathscr{P}(E)$ عبارتست از خود E، که درموردآن‌داریم: $\operatorname{card} \mathscr{P}(E) > \operatorname{card} E$.

حالا مجموعهٔ N را در نظر می‌گیریم که عبارتست از مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی‌که هرکدام ازآنها، ضمناً عضو خودشان هستند. باید یادآوری‌کرد که تاکنون چنین مجموعه‌هائی شناخته نشده‌اند و حتی‌این احتمال وجود داردکه هرگز نتوانیم یکی‌از این مجموعه‌ها را پیداکنیم. اگرچنین مجموعه‌ای وجود داشته باشد، نمی‌تواند با تعریف کانتور سازگارباشد، زیرا بنابرتعریف‌کانتور، عضوهادریك‌کل (به‌نام‌مجموعه) گرد می‌آیند، به‌نحوی‌که این‌کل (یعنی این‌مجموعه) باهرکدام ازعضو-های خود فرق دارد.

یادداشت. درهمین‌جا به‌یك پارادوکس‌می‌رسیم. مجموعه چیست؟ یك مفهوم انتزاعی. حالا، اگرمجموعهٔ همهٔ مفهوم‌های انتزاعی‌را تشکیل‌دهیم، چنین مجموعه‌ای شامل خودش هم می‌شود (زیرا خود این مجموعه هم، یك مفهوم انتزاعی است) و درنتیجه به‌پارادوکس برمی‌خوریم.

ولی ما فرض می‌کنیم که مجموعهٔ N، مجموعه‌ای تهی نباشد. درنتیجه، هر مجموعهٔ دلخواه، یا به‌M تعلق دارد ویا به‌N. این‌پرسش پیش می‌آید: خود مجموعهٔ M، عضوی از M است یا N.

۱) اگر فرض‌کنیم‌که M به مجموعهٔ M تعلق دارد، تعریف M را نقض کرده‌ایم، زیرا M عبارت بود از مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هائی که نمی‌توانستند شامل خودشان، به‌عنوان عضو مجموعه، باشند.

۲) اگر فرض‌کنیم که M به‌مجموعهٔ N تعلق دارد، باز هم به تناقض برمی‌خوریم، زیرا درN، مجموعه‌هایی‌گردآمده‌اند، که‌هرکدام از آنها، عضو خودشان هستند. بنابراین، M هم باید عضو خودش، یعنی مجموعهٔ M، باشد.

هردو فرض به تناقض برمی‌خورد. این تناقض را برتراندراسل، ریاضی‌دان انگلیسی، در ۱۹۰۳ میلادی طرح کرد. مفهوم «مجموعهٔ‌همهٔ مجموعه‌هائی که عضو خودشان نیستند»، ادراکی است که باید از نظریهٔ مجموعه‌ها کنارگذاشته شود، تابه‌تناقضی برخورد نکنیم.

برای روشن شدن پارادوکس راسل، آن را به‌صورت پارادوکس «ریش تراش» شرح می‌دهیم. ریش‌تراش یك روستا، وظیفه داردکه‌ریش ساکنین این روستا را، به‌شرطی که خودشان قادر به‌اصلاح صورتشان نباشند، بتراشد. آیا این ریش‌تراش، صورت خودش را هم اصلاح کند؟ اگرخودش را اصلاح کند، جزوگروهی‌به‌حساب می‌آیدکه قادر به‌اصلاح خودشان نیستند. واگر خودش‌را اصلاح نکند، جزوگروهی قرارمی‌گیرد که‌باید ریش‌آنها را بتراشد. هرطرفی را که بگیرد، باخودش درتناقض درمی‌آید.

وضع‌دروغگوئی هم‌که به «پارادوکس‌کرتی» مشهور شده است، به‌همین قرار است. اگر دروغگوی موردبحث اظهار بداردکه «من‌دروغ می‌گویم»، بیان‌او را چگونه تعبیرکنیم. اگر فرض‌کنیم‌که او درادعای خود صادق است و یك «درغگو» است، این‌بار راست‌گفته است‌که بر-خلاف خصلت دروغگوئی اوست. ولی اگر فرض‌کنیم که همین جمله را هم دروغ‌گفته است، آنوقت به‌معنای این است‌که او «آدمی‌راستگو» است، که بازهم با خصلت دروغگوئی او درتناقض است.

۲. پارادوکس ریشارد

هرعدد درست یك نام دارد. این نام با واژه‌ها بیان می‌شود واین واژه‌ها هم شامل حرف‌هایی هستند. مثلاً عدد درست۱۴۰۹ به‌این‌ترتیب بیان مـی‌شود: «هزارو چهارصدو نه»که شامل ۱۴ حـرف است. با صد حرف تنهاتعداد محدودی از عددهای درست را می‌توان نوشت، بنابر-

این تعدادی نامحدودی از عددهای درست باقی‌می‌ماند که بیان نام‌آنها، شامل بیش از صد حرف است. مجموعهٔ این‌عددها، دارای یک عدد می‌نیمی است که می‌توان آن را اینطور تعریف کرد: «کوچکترین عدد درستی که نام‌آن نمی‌تواند با کمتر از صد حرف نوشته شود». ولی خود این تعریف، شامل پنجاه‌و دو حرف است (که کمتر ازصدحرف می‌شود) و درنتیجه دربرابر یك پارادوکس قرار می‌گیریم.

۳. مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها

«مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های قابل تصور» را در نظر می‌گیریم. روشن است که این مجموعه؛ وسیع‌ترین مجموعهٔ ممکن است. بنابراین باید بالاترین قوت را هم‌داشته باشد. ازطرف دیگر می‌دانیم که مجموعهٔ زیر مجموعه‌های یك مجموعه، قوتی بزرگتر از خود مجموعه دارد و بنابراین «وسیع‌تر» ازآنست.

تصور «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها» هم به‌تناقض برخورد می‌کند و بنابراین آن‌را هم باید از نظریهٔ مجموعه‌ها کنارگذاشت.

از این گذشته، این«مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها»، مجموعه‌ای‌می‌شود که ضمناً خودش، یکی از عضوهای خودش است. ولی ما می‌دانیم که وجود چنین مجموعه‌ای، با تعریفی که کانتور داده است، سازگارنیست.

«هیچ کلی نمی‌تواند شامل بخش‌هایی باشد که به‌وسیلهٔ این کل مشخص‌نشده‌اند. درنتیجه، هربخش کل، وابسته به‌این کل‌است»(راسل).

۴. پارادکس بورالی فورتی[1]

بورالی‌فورتی، ریاضی‌دان ایتالیائی، در۱۸۹۷ خاطرنشان کرده است که مجموعهٔ همهٔ عددهای ترتیبی، دارای یك عدد ترتیبی است که

---

1. Cesare Burali-Forti (1861 - 1931).

از بزرگترین عضو این مجموعه، اکیداً بزرگتر است.

همین‌طور می‌توان ثابت کرد که عدد اصلی مجموعهٔ عددهای اصلی، از بزرگترین عدد اصلی موجود در این مجموعه، اکیداً بزرگتر است.

فهرست پارادوکس‌ها را، به‌خاطر یك نتیجه‌گیری ساده، در اینجا متوقف می‌کنیم: اگر بخواهیم از تناقض‌ها پرهیز کنیم، باید مفهوم‌هائی از نوع «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها» یا «مجموعهٔ همهٔ عددهای ترتیبی» وغیره را از نظریهٔ مجموعه‌ها، کنار بگذاریم.

این مفهوم‌ها یکدیگر را هم نقض می‌کنند و یك ساختمان اصل موضوعی دقیق برای نظریهٔ مجموعه‌ها (زرمه‌لو ـ ۱۹۰۸)، اجتناب از آنها را ممکن ساخته است.

تمرین

۱. آیا یك عدد درست بزرگتر از تمامی دیگر عددهای درست وجود دارد؟

۲. آیا مجموع دو عدد درست، یك‌عدد درست است؟ عدد درستی که‌مجموع همهٔ عددهای درست باشد، کدام است؟

۳. آیا یك عدد اصلی وجود دارد که بزرگتر از سایرین باشد؟

۴. مجموعهٔ E شامل عددهای درست ۱ و۲ و ضمناً کوچکترین‌عدد درستی است که در این تمرین داده نشده است. آیا {۳ ، ۲ ، ۱}=E است؟

۵. پارادوکس «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هائی که عضوی از خودشان نیستند» را به‌وسیلهٔ نمادهای نظریهٔ مجموعه‌ها بیان کنید.

§ ۳۲. شکل‌گرائی[1] و معرفت شهودی[2]

۱. شکل‌گرائی

ریاضیات، و به‌ویژه بنیاد ریاضیات، را از دیدگاههای مختلف

1. Formalisme. 2. Intuitionnisme.

می‌توان مورد بررسی قرارداد. دو مکتب شکل‌گرائی ومعرفت شهودی، با دوشیوهٔ کاملاً متفاوت، به‌گسترش درك ریاضیات، کمك‌کرده‌اند (ما دراین کتاب، به‌نظریه‌های بینابینی نمی‌پردازیم).

پارادوکس‌هایی‌که در نظریهٔ مجموعه‌ها وجود دارد، به‌اندازهٔ کافی، بهانه برای جرو بحث‌های شدید این دو مکتب را به وجود آورده‌اند. ولی، واقع این‌است‌که اختلاف‌نظرها، ازحد این پارادوکس‌ها تجاوز می‌کنند وعملاً به‌دو درك متفاوت از بنیاد وجودی ریاضیات، مربوط می‌شود.

دربخش‌های‌گذشته، به‌ویژه با ضابطه‌های مکتب شکل‌گرائی و نظریهٔ مجموعه‌های‌کانتور ـ که هدف این‌کتاب بود و برپایهٔ ضابطه‌های شکل‌گرائی بنا شده است ـ آشنا شده‌ایم. بعد ازکانتور، داوید هیلبرت (۱۸۶۲ـ۱۹۴۳)، یکی از نمایندگان برجستهٔ این‌مکتب بوده است.

مشخصه‌های شکل‌گرائی چنین است:

الف) روش اصل موضوعی.

پیش ازآغاز بنای یك نظریهٔ ریاضی، دستگاه مستقلی ازضابطه‌های‌بنیادی، که «اصل» نامیده می‌شوند، درنظرگرفته می‌شود. این‌دستگاه بایدکامل و بی‌تناقض باشد. بعد، از این ضابطه‌های بنیادی، و به‌کمك استدلال‌های منطقی، گزاره‌های دیگری نتیجه می‌شود. مفهوم‌هایی‌که‌در این‌گزاره‌ها به‌کار می‌رود، عبارتند از «اشیاء بدون معنا»، «عددها»، و مثلاً «نمادهای بدون محتوای عددهای حقیقی».

به‌این ترتیب، مفهوم‌هایی از نوع «نقطه»، «خط» و«صفحه»، که درتصور ما متناظر با شکل‌های هندسی هستند، مفهوم‌هائی ممکن، ولی غیرضروری به‌شمار می‌روند.

چند مثال

اصل اقلیدس. ازنقطه‌ای‌که درخارج یك خط واقع باشد، می‌توان‌یك

خط، و تنها یك خط، موازی با خط مفروض رسم کرد.

ـ گزاره‌ای که بلافاصله از اصل اقلیدس نتیجه می‌شود، چنین است: مجموع سه زاویهٔ مثلث، برابر است با ۱۸۰ درجه.

ب) ضابطهٔ بی‌تناقضی

نه‌تنها اصل‌ها، بلکه مفهوم‌های داده شده هم، باید مصون از تناقض باشند. هر مفهوم باید با ضابطهٔ «همانی» سازگار باشد. بنابر ضابطهٔ «همانی»:

اگر $a=b$ باشد، دیگر $a\neq b$ نیست، و اگر $a\neq b$ باشد، دیگر $a=b$ نیست.

درمکتب شکل‌گرائی، وجود یك مفهوم، به‌معنای بی‌تناقضی آن است.

مثال. «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها»، یك مفهوم متناقض است، زیرا در عین‌حال‌داریم: $E=E$ و $E\in E$، پس $E\neq E$. برای هواداران مکتب‌شکل‌گرائی، مفهوم «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها» وجود ندارد.

پ) ضابطهٔ نفی ثالث

یا داریم $a=b$ ویا داریم $a\neq b$. حالت سومی وجود ندارد. این ضابطه، برای داوری‌کردن برمبنای روش برهان خلف، که مبتنی بر اثبات یك غیر ممکن است (تعلیق به‌محال)، بنیادی است.

چند مثال

ـ عدد گویای $\frac{m}{n}$، که به‌ازای آن $\frac{m}{n}=\sqrt{۲}$ باشد،وجود ندارد، بنابر-این، گزارهٔ خلاف آن درست است، یعنی $\sqrt{۲}$ یك عددگنگ است.

ـ روش دوم قطری: مجموعهٔ عددهای‌حقیقی شمارا نیست، زیرافرض شمارائی به‌یك تناقض برمی‌خورد.

ـ اثبات قضیهٔ هم‌توانی.

ـ اثبات قضیهٔ بولزانو ـ وایرشتراس.

ت) ضابطهٔ قطعیت هر مسألـهٔ ریاضی

برای شکل‌گرایان، هرمسألهٔ ریاضی، قطعیت دارد، حتی اگر حل نشده باشد. به‌گفتهٔ هیلبرت، هر ریاضی‌دانی باید در «ایمان به‌اینکه هرمسألهٔ‌ریاضی، تنها با وسیلهٔ استدلال‌منطقی قابل حل‌است»، سهیم باشد.

چند مثال

- عدد ۲۹۹۹۹۹ یا عددی اول است و یا عددی مرکب. با تعداد محدودی استنتاج می‌توان ثابت‌کرد‌که اول است.

- مجموعهٔ زوج‌های متوالی عددهای اول (مثل ۱۱، ۱۳ یا ۱۷، ۱۹ یا ۲۹، ۳۱) یا متناهی است و یا نامتناهی. این مسأله تا امروز حل نشده است.

- هرعدد زوج‌می‌تواند به‌صورت مجموعی از دوعدد اول نوشته‌شود (قضیهٔ گولدباخ[1]). این قضیه تاامروز ثابت‌نشده است.

- دست‌کم یک سه‌تائی از عددهای درست وجود دارد، به‌نحوی که به‌ازای ... ،۵ ،۴ ،۳=n داشته باشیم: $x^n+y^n=z^n$ (قضیهٔ فرما[2]). این قضیه تاامروز ثابت‌نشده است. به‌زبان دیگر، این‌مسأله‌که آیامجموعهٔ جواب‌های

$$S=\{(x,y,z) \mid x^n+y^n=z^n \wedge x,y,z,n\in N \wedge n>۲\}$$

تهی است، تا امروز بدون پاسخ مانده است.

یکی از هدف‌های بنیادی‌آموزش ریاضیات درمدرسه، این‌است که روش استفاده ازشکل‌گرائی (فرمالیسم)را به‌دانش‌آموزان یادبدهیم. همان‌طور که دراین‌کتاب نشان‌داده‌شد، شکل‌گرائی‌به‌معنای‌مجموعه‌ای‌از روش‌های‌مکانیکی، به‌نحوی‌که‌اندیشه‌دخالتی درآن‌نداشته باشد، نیست. برعکس، شکل‌گرائی عبارتست ازهنردشواراستنتاج منطقی وتجرید. اگر

---

۱. کریستیان گولدباخ Christian Goldbach (۱۶۹۰—۱۷۶۴).

۲. پیر فرما Pierre Fermat (۱۶۰۱—۱۶۶۵).

شکل‌گرائی، به‌این‌معنا گرفته شود، همهٔ ریاضی‌دانان کم و بیش‌شکل‌گرا هستند.

۲. معرفت شهودی

به‌ریاضی‌دانان این مکتب، به‌این مناسبت، نام شهودگرا و یا اشراقی داده شده است که آنها به شهود ابتدائی، نوعی هدایت درونی که ما ازرشته عددهای‌درست‌داریم، اعتماد می‌کنند. برای‌شکل‌گرایان، عددهای درست و عمل‌های مربوط به‌آنها، باید در اصل عدم تناقض صدق کنند؛ درحالی‌که برای شهودگرایان، این‌عددها داده‌های بنیادی هستندکه توجیه‌آنها نه‌ممکن است ونه‌لازم.

معمولاً کرونکر[1]، ریاضی‌دان‌آلمانی، را پیش‌قدم شهودگرایان می‌دانند. اوست‌که شهود بنیادی را تعریف‌کرده است: «عددهای‌طبیعی را خداوندآفریده است. آفرینش بقیهٔ عددها،کار انسان است».

ولی شهودگرایان، همین بخش اخیر گفتهٔ‌کرونکر راکه«آفرینش بقیهٔ عددها کارانسان است»، مورد انتقاد شدید قرار می‌دهند. پیشروان مکتب‌شهودگرائی‌عبارت بودند ازهرمان‌ویل[2] وبه‌خصوص ژان‌براوور[3]، که برای مشخص‌کردن موضع خود، خود را «نواشراقی» خوانده است.

ویژگی‌های معرفت شهودی چنین است:

الف) شهود ابتدائی عددهای طبیعی.

ب) قاعده‌ای‌که به‌موجب‌آن، هیچ‌چیز در ریاضیات وجود ندارد که نتواند ساخته شود.

شهودگرایان، برخلاف شکل‌گرایان، عدم تناقض را همچون یك

---

۱. لئوپولد کرونکر Léopold Kronecker (۱۸۲۳-۱۸۹۱).

۲. هرمان ویل Hermann Weyl (۱۸۸۵-۱۹۵۵).

۳. ژان براوور Luitzen Egbertus jan Brouwer (متولد درسال ۱۸۸۱).

برهان‌کافی برای وجود یك مفهوم، نمی‌پذیرند. آنها این ضابطه‌را، به عنوان بازی با واژه‌ها، و چیزی‌که عاری ازمعنا است، درنظرمی‌گیرند.

هدف ریاضیات، مهم‌تراز روش‌آن‌است، و استدلال‌جز درخدمت ساختن این‌هدف، نباید باشد.

دراینجا «ساختن» به معنای دقیقی‌گرفته شده است: تعیین هدفی تازه، از روی هدف‌های ساده‌تر و به‌کمك تعداد محدودی عمل، هر چیزی‌که نتواند در ساختن چنین هدفی خدمت کند، مثل سور وجودی «... وجود دارد» بی‌معناست. یك سور وجودی، به‌قول هرمان ویل، «یك‌کاغذ» است‌که وجود یك‌گنجینه را ثابت می‌کند، بدون‌آنکه جای گنجینه را نشان بدهد.

چند مثال

ـ برای شهودگرایان، قضیهٔ زرمه‌لو ارزشی ندارد، زیرا این قضیه تنها وجود یك مجموعهٔ خوش‌ترتیب را ثابت می‌کند، بدون اینکه نشان دهدکه رابطهٔ خوش‌ترتیبی، چگونه باید برقرار شود.

ـ اگر دریك حالت‌خاص نتوان گفت‌که آیا یك‌عدد جبری است یاغیر جبری، اثبات وجود عددهای غیر جبری‌به‌چه‌دردمی‌خورد؟

به‌همین ترتیب، شهودگرایان، به خاطر به‌کار بردن بدون فکر مفهوم‌هایی ازقبیل«تناظر»، «قاعده» وغیره، که به‌درد یك‌کارساختمانی نمی‌خورند، به‌شکل‌گرایان ایراد می‌گیرند.

چند مثال

ـ عدد $\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲ \ldots$ را درنظر می‌گیریم. هر رقم چهارم بعد ازممیز را به‌۵ تبدیل می‌کنیم، آیا عدد $۱/۴۱۴۵\ldots۵\ldots$ ،که به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آید، جبری است یا غیر جبری؟ این مسأله حل نشده است.

ـ عدد دهدهی $r = ۰/a_۱a_۲a_۳\ldots$ و تناظر بین a_i ها و رقم‌های عدد $\pi = ۳/۱۴۱۵۹\ldots$ را، که‌به‌ترتیب زیرتعریف شده است، درنظر می‌گیریم.

مجموعهٔ رقم‌های بعداز ممیز را در π، به‌گروه‌های‌ده رقمی تقسیم‌می‌کنیم. اگر گروه ردیف iام از ۱۰ رقم ۷ تشکیل شده باشد، $a_i = ۱$ و در غیر این‌صورت $a_i = ۰$ می‌گیریم. ما نمی‌دانیم‌که‌آیا r برابرصفر است یامخالف صفر. شکل‌گرایان می‌گویند که عدد r وجود دارد. ما «قاعده»ای برقرار کرده‌ایم‌که بتوان به‌کمك رقم‌های عدد π، رقم‌های عدد r را به‌دست‌آورد. ولی این تناظر به‌تناقضی منجر نمی‌شود. برعکس، شهودگرایان می‌گویند که: ما نمی‌دانیم‌که آیاعدد r برابر صفر است یامخالف صفر. ماهیچ‌وسیله‌ای برای ساختن r در دست نداریم. درنتیجه، چنین عددی وجود ندارد.

پ) نهی به‌کار بردن ضابطهٔ نفی ثالث

برای شهودگرایان، ضابطهٔ نفی ثالث، یك سابقهٔ ذهنی بی‌پایه است. آنها می‌گویندکه این ضابطه از منطق مقدماتی‌درمورد مجموعه‌های‌متناهی، برداشته شده است، آن وقت با این «قضاوت‌قبلی» وبدون جهت، آن‌را برای مجموعه‌های نامتناهی‌هم به‌کار برده‌اند. برای‌شهودگرایان، لزومی ندارد‌که حتماً یکی‌از دو ادعای $a=b$ و $a \neq b$ درست باشد؛ به‌نظرآنها می‌تواند امکان‌سومی هم وجود داشته باشد.

ت) تصمیم ناپذیری مسأله‌های ریاضی

برای شهودگرایان، همهٔ مسأله‌ها، تصمیم‌پذیر نیستند، اگر چه به‌نظر می‌رسد‌که ماامروز مسأله‌های تصمیم‌ناپذیر نداریم، بلکه‌آنچه‌در برابر ما قرارگرفته است، مسأله‌هایی حل‌نشده است.

چند مثال

ـ آیا عدد $۱ + ۲^{۱۰۲۴}$، عددی اول‌است؟ دراین‌مورد چیزی‌نمی‌دانیم. با این وصف می‌توان مسأله را، چه به مفهوم شکل‌گرایان وچه به‌مفهوم شهودگرایان، با تعداد محدودی عمل، حل‌کرد؛ ولو اینکه انجام محاسبهٔ مربوط به‌این عمل‌ها، سالها طول بکشد.

ـ آیامعادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ $(n = ۳،۴،۵،...)$، باشرط $x، y، z \in N$، جواب دارد؟

برای شهودگرایان سه‌امکان وجود دارد:

۱) دست‌کم یك سه تایی T، که درمعادله صادق باشد، وجوددارد؛

۲) حتی یك سه‌تایی صادق در معادله، وجود ندارد.

۳) مسأله تصمیم‌پذیر نیست.

ث) از دیدگاه شهودگرایان، باید مفهوم‌های زیر، از نظریهٔ مجموعه‌ها حذف شود:

۱) همهٔ‌مجموعه‌های‌دارای قوت بالاتر از شمارا، زیرا هرمجموعهٔ با قوت پیوسته، بی‌نهایت بالفعل نیست.

۲) قضیهٔ هم‌توانی.

۳) قضیهٔ بولزانو ـ وایرشتراس.

۴) قضیهٔ زرمه‌لو.

۵) قضیهٔ‌کانتور $\mathrm{card}\ \mathscr{P}(E) > \mathrm{card}\ E$.

۶) مفهوم برش‌ددکیند وغیره.

شهودگرایان در دیگرزمینه‌های ریاضیات هم، معتقد به«تصفیه» هستند، به‌نحوی‌که بعد ازآن، تنها بخشی از مجموعهٔ معلومات‌ما باقی خواهد ماند.

۳. نتیجه

برای نتیجه‌گیری یادآوری می‌کنیم‌که شهودگرایان نتوانستند جلوگسترش شکل‌گرائی را بگیرند، بلکه برعکس با وادارکردن شکل‌ـ گرایان به‌دقت بیشتر، به‌شکفتگی‌آن یاری رساندند.

زمانی مناقشات قلمی بسیار تند بود. روزی بود که کانتور می‌نوشت: ... بگوییم‌که مسأله، مسألهٔ برتری است. مسأله عبارتست ازدانستن‌این‌که‌کدام‌اندیشه، قوی‌تر، گسترده‌تر وبارورتر است! اندیشهٔ آنهایا اندیشهٔ ما؟ ودرهمین‌جاست‌که توفیق یکی‌از دونظریه، ودرنتیجه

طرف غالب را، معین خواهد کرد.

سرانجام پیکار چه شد؟

یك ریاضی‌دان و یك مورخ معاصر[1]، چند سده بعد و در شهری که درچندهزار کیلومتری محل پیکار اصلی می‌زیست، دراین مورد گفته است: این یك پیکار بی‌نتیجه، بین هیلبرت شکل‌گرا و کرونکر شهودگرا، برسر برتری در زمینهٔ ریاضیات بود.

ظاهراً هیچ کدام از هم‌آوردها، در تلاشی که برای ازمیدان به‌در کردن حریف خود داشت، فکرنمی‌کرد که نتیجهٔ این مبارزه، هیچ اهمیتی برای خود ریاضیات ندارد.

شکل‌گرایان و شهودگرایان، همیشه وجود خواهند داشت و هر ریاضی‌دانی، همیشه کمی از این وکمی ازآن خواهدبود.

بهتر است بگوییم که وجود این دوقطب، همیشه می‌تواندسرچشمهٔ آفرینش‌های تازه‌ای باشد.

درموردآنچه که به‌ما مربوط است، خوشحالیم که توانسته‌ایم در زمینهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها «به‌بهشتی وارد شویم که کسی را یارای بیرون کردن ما ازآن نیست» (هیلبرت). ما، درجه‌های بی‌نهایت را کشف کردیم، چیزهای معجزآسایی آموختیم وآنچه را، که قبلاً برایمان غیر قابل فهم بود، فهمیدیم.

بحث را، بانقل قولی ازسته‌ون[2] خاتمه می‌دهیم. این ریاضی‌دان، با کمك به‌فراهم آمدن نظریهٔ عددهای دهدهی، ابزار فوق‌العاده‌ای آفرید که نظریهٔ مجموعه‌ها، بدون آن ناچار بود از بسیاری از بارورترین روش‌های اثبات خود چشم بپوشد (نمایش یك عدد حقیقی به‌وسیلهٔ یك

1. E. T. Bell- The Development of Mathematics.

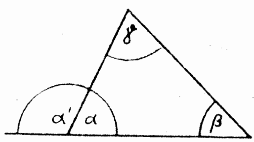
2. Simon Stévin (1548-1620). New York 1945.

عدد دهدهی نامحدود). سته‌ون با خوشحالی از کشفی که درمورد وجود متوازی‌الاضلاع نیروها، در یك سطح مورب شده بود، درحاشیهٔ کتابی این‌شعار را نوشت، که بدون تردید می‌تواند درمورد نظریهٔ مجموعه‌ها به‌کار رود:

«معجزه‌ای که در واقع، معجزه نیست!»

تمرین

۱. از قضیهٔ مربوط به مجموع سه زاویهٔ یك مثلث، و ویژگی سرایت‌پذیری رابطهٔ تساوی، قضیهٔ مربوط به‌زاویه‌های خارجی مثلث را نتیجه بگیرید (شکل ۵۰).



شکل ۵۵. برای تمرین ۱

۲. به‌این پرسش پاسخ دهید: «آیا یك دایرهٔ محیط به هر مثلث هندسهٔ اقلیدسی وجود دارد؟»

الف) با رعایت قانون‌های شکل‌گرائی،

ب) با رعایت قانون‌های شهودگرائی.

۳. آیا مسألهٔ زیر تصمیم‌پذیر است: مجموعهٔ جواب‌های

$$S=\{(x,y,z)\mid x^n+y^n=z^n,\ x,y,z\in N\}$$

به‌ازای $n=۳$ و $n=۴$ تهی است؟

۴. به‌طورغیرمستقیم ثابت کنیدکه توان سوم هرعدد فرد، یك‌عدد فرداست.

۵. به‌طور غیرمستقیم ثابت‌کنید: اگر مجموعهٔ جواب

$$S=\{x\mid x^۲+ax+b=۰ \wedge a,b\in Z\}$$

تنها شامل عددهای گویا باشد، دراین‌صورت این‌عددها، درست است.

XI. یادداشت تاریخی

۳۳§. بی‌نهایت بالقوه

۱. مفهوم حد

الف) به‌گفتهٔ ویل (H.Weyl)، ریاضیات دانش بی‌نهایت‌است. به‌جز این، ما می‌دانیم (§۸.۲) که این بی‌نهایت، به‌دو شکل کاملاً متفاوت متجلی می‌شود. قبل از کانتور، همچون گوس، فکر می‌کردند که «بی‌نهایت نوعی بیان این حقیقت است که بعضی از پدیده‌ها را می‌توان به‌دلخواه، به‌مقداری موسوم به‌حد، نزدیك کرد، درحالی‌که بعضی دیگر به‌طور نامتناهی بزرگ می‌شوند». به‌نظر کارل فردریك گوس (۱۸۵۵-۱۷۷۷)، قابل‌قبول نبود که‌در ریاضی، بتوان‌با یك کمیت‌نامتناهی، همچون یك‌کمیت متناهی، کارکرد. برای او، تنها بی‌نهایت بالقوه وجود داشت‌که از راه‌گذار به‌حد، قابل درك بود.

مثال. کسر $\frac{1}{n}$، با شرط $n\in N$، به‌سمت صفر میل می‌کند، وقتی که n به‌سمت به‌نهایت‌برود: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. برای $\varepsilon>0$، عدد درستی مثل $N(\varepsilon)$ وجود دارد، به نحوی که اگر داشته باشیم: $n>N(\varepsilon)$، خواهیم داشت: $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$. مثلاً اگر داشته باشیم: $\varepsilon=0/000001$، به دست خواهیم آورد: $N(\varepsilon)=1000000$.

ب) پیدایش مفهوم حد یك رشتهٔ نامتناهی جمله‌ها را بایدزمانی دانست‌که فیثاغورث عددهای کنگ راکشف کرد (سنجش ناپذیری یك پاره خط به‌طول $\sqrt{2}$ با پاره خطی به‌طول۱). اما اودوکس (Eudoxos) (۴۰۸-۳۵۵ پیش از میلاد) هم‌از مفهوم حد، درنظریهٔ نسبت‌های خود، که درکتاب پنجم «مقدمات» اقلیدس ارائه شده است، استفاده کرده

است. ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ پیش از میلاد) هم این نظریه را در روش‌های خود برای محاسبهٔ سطح‌ها وحجم‌ها به‌کار برده‌است.

در اوایل سدهٔ هفدهم، مفهوم حد تنها برای حل مسأله‌های هندسی به‌کارمی‌رفت: یوهان کپلر(۱۵۷۱-۱۶۳۰)گالیله‌ئوگالیله (۱۵۶۴-۱۶۴۲)، بوناو نتوراکاوالیری (۱۵۹۸-۱۶۴۷) و بلز پاسکال (۱۶۱۳-۱۶۶۱) را از جمله‌کسانی باید دانست‌که از روش حد استفاده می‌کرده‌اند.

بعدها، وبازهم برمبنای ملاحظه‌های هندسی، اوگوست لوئی‌کوشی (۱۷۸۹-۱۸۵۷) بود که مفهوم حد را به‌صورت قطعی وارد در ریاضیات کرد.

می‌گویند رشتهٔ x_i (مجموعهٔ مرتب و شمارای x_1، x_2، x_3، ...) به‌سمت حد x_0 میل می‌کند، وقتی‌که برای هر عدد دلخواه $\varepsilon > 0$، عدد درست $N(\varepsilon)$ وجود داشته باشد به‌نحوی که به ازای $n > N(\varepsilon)$ داشته باشیم: $|x_n - x_0| < \varepsilon$.

به‌زبان دیگر، تقریباً همهٔ عضوهای رشته (به‌جز تعدادی متناهی از آنها)، درهمسایگی به‌قدر دلخواه‌کوچك x_0 واقع باشند.

۲. مفهوم تابع

الف) مفهوم‌هندسی تابع، که‌به نیکلااُرسم (Nicolas Oresme) (۱۳۲۳-۱۳۸۲)، امکان رسم نمودارها را می‌داد، به‌همت رنه دکارت (René Descartes) (۱۵۹۶ - ۱۶۵۰)، به‌صورت یك مفهوم جبری درآمد. او در«رسالهٔ هندسه» (۱۶۳۷)، به‌دنبال «گفتار دربارهٔ روش»، برای نخستین‌بار، ویژگی‌های هندسی را به‌زبان جبری بیان‌کرد(هندسهٔ تحلیلی).

ب) درك سنتی مفهوم تابع (تعریف شده روی مجموعهٔ عددهای حقیقی)، آنطورکه ما می‌شناسیم و امروز به‌کار می‌بریم، از گوستاو-

لژون دیریکله (Gustave Lejeune-Dirichlet) (۱۸۰۵ - ۱۸۵۹) ، جانشین گوس درگوتینگن است: به متغیر x، متغیر y نظیر می‌شود (اغلب به‌وسیلهٔ یك معادله وگاهی هم به‌کمك یك جدول یا یك نمودار). مفهوم تابع دیریکله، بعدها تغییرشکل داد و دقیق‌تر شد (§ ۳.۳۵ را ببینید).

پ) ریاضی‌دانان گوس، کوشی و فردریك برنهارد ریمان (Friedrich Bernhard Riemann) (۱۸۲۶-۱۸۶۶) ، جانشین دیریکله در گوتینگن، نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط را آفریدند و کارل تئودور وایرشتراس (Karl Theodor Weierstrass) (۱۸۱۵ - ۱۸۹۷)، که کانتور شاگردش در برلین بود، به‌طور قابل ملاحظه‌ای این نظریه را گسترش بخشید.

۳. حساب دیفرانسیل و انتگرال

الف) مهم‌ترین کاربرد مفهوم حد، درحساب دیفرانسیل وانتگرال است. بنیان‌گذاران حساب دیفرانسیل و انتگرال را باید ایزاك نیوتون (Izaac Newton) (۱۶۴۳-۱۷۲۷) و گوتفرید ویلهلم لایپ‌نیتز (۱۶۴۶-۱۷۱۶) دانست، ولی در استحکام و گسترش آن برادران ژاك برنولی (Tacques Bernoulli) (۱۶۵۷-۱۷۰۵) و ژان برنولی (jean - Bernoulli) (۱۶۶۷ - ۱۷۴۸)، همچنین دانیل برنولی (Daniel - Bernoulli) (۱۷۰۰-۱۷۸۲) پسرژاك ولئونارداولر(Leonhard Euler) (۱۷۰۷-۱۷۸۳) دوست دانیل برنولی سهم جدی داشتند.

ب) ازنتیجه‌های بسیارمهم حساب دیفرانسیل وانتگرال بایدازمفهوم پیوستگی (§۴.۱۷)، مفهوم دیفرانسیل و انتگرال‌ریمان (§ ۱.۱۳) وهمهٔ قاعده‌های محاسبه وقضیه‌های پرارزشی دربارهٔ این مفهوم‌ها، نام برد.

۳۴§. بی‌نهایت بالفعل

۱. نظریهٔ عددها

الف) از همان زمانی‌که جستجوهای مربوط به بی‌نهایت بالقوه دنبال می‌شد، نظریهٔ عددها هم چشم به‌جهان‌گشود. البته قبلاً در کتاب‌های ۷ و ۹ «مقدمات اقلیدس»، بخش پذیری عددهای درست مورد بررسی قرارگرفته بود و درهمان زمان، بی‌پایان بودن رشته عددهای اول هم ثابت شده بود.

ب) بعدها ریاضی‌دانان فرانسوا ویت (Francois Viete) (۱۶۰۳ - ۱۵۴۰)، سیمون‌سته‌ون (Simon Stevin) (۱۶۲۰ - ۱۵۴۸)، پیردو فرما (Pierre de Fermat) (۱۶۶۵ - ۱۶۰۱)، همچنین پاسکال، لایپ نیتز، اولر و گوس، به‌استحکام نظریهٔ عددها کمک کردند.

پ) ریشارد ددکیند (Richard Dedkind) (۱۹۱۶ - ۱۸۳۱)، دوست‌کانتور، مفهوم برش را ـ که به‌نام وی است ـ پیدا کرد. او با کارهای خود[1]، یکی از پیش قدمان طرح نظریهٔ مجموعه‌ها به حساب می‌آید.

۲. نظریهٔ مجموعه‌ها

الف) برنهارد بولزانو(Bernhard Bolzano) (۱۸۴۸ - ۱۷۸۱) را می‌توان پیشرو کانتور در نظر گرفت. کتاب او «پارادوکس‌های بی‌نهایت»، که پس‌از مرگ او درسال۱۸۵۱ چاپ شد، بی‌نهایت‌بالفعل را موردبحث قرارداده است.

ب) بنیان‌گذارنظریهٔ مجموعه‌ها کانتور است. ژرژ کانتور در سوم

---

1. «Notion de continuité et nombres irrationneles» (1872) et «Que sont les nombres› que peuvent - ils?»

مارس سال ۱۸۴۵ در سنت پطرزبورگ متولد شد. پدرش بازرگانی اهل کپنهاك بود. کانتور درششم ژانویه سال ۱۹۱۸ درهال درگذشت. کانتور تحصیلات خود را در دارمشتاد، زوریخ، گوتینگن ادامه داد و سپس در برلین شاگرد کرونکر و وایرشتراس بود. درسال ۱۸۷۲ درهال به‌مقام استادی رسید، درآنجا بود که از سال ۱۸۷۴ به‌بعد، اثرهای خود را دربارهٔ «نظریهٔ گوناگونی‌ها» منتشر کرد و بعد از دو دلی‌های بسیار، از اندیشهٔ جسورانه‌ای که در ذهن خود داشت، پرده برگرفت. او زمانی این تصمیم را گرفت که قانع شد، آفریدهٔ ذهنی او برای ریاضیات ضروری است. خود او اینطور توضیح می‌دهد: «... چیزی نیست جز گسترش و ادامهٔ رشتهٔ عددهای درست به‌ورای بی‌نهایت. هرقدر که جسارت آمیز به‌نظر آید، من نمی‌توانم تنها به‌واژهٔ «امیدوارم» رضایت بدهم. باید بگویم که این اعتقاد من است، اعتقاد به‌اینکه این اندیشه روزی همچون یك واقعیت ساده درنظر گرفته شود، واقعیت اختصاصی و طبیعی ریاضیات». بعدها هیلبرت گفت: «کانتور یکی از نیرومندترین و بارورترین شاخه‌های ریاضیات را آفریده است؛ او بهشتی را ساخته است که هیچکس نمی‌تواند ما را از آنجا براند».

بیش از نیم‌قرن است که کانتور مرده است وازآن به‌بعد تاکنون، نظریهٔ مجموعه‌ها توانسته است در جهت‌های مختلف گسترش یابد. به دلیل وجود بعضی ضعف‌ها (و ازآن جمله، پارادوکس‌ها)، مفهوم‌ها و روش‌های تازه‌ای؛ و حتی بخش‌های بدون سابقه‌ای، در ریاضیات به‌وجود آمده است، با این وصف نمی‌توان انکار کرد که کانتور بنیان‌گذار نظریه است و که اندیشهٔ او سرچشمهٔ همهٔ کشف‌های بعدی، و حتی تازه‌ترین آنهاست.

پ) ارنست زرمه‌لو (Ernst Zermelo) (۱۸۷۱-۱۹۳۵)، در سال ۱۹۰۵ قضیه‌ای را ثابت کرد که به‌نام خود اومشهور شده است. همچنین

او درسال ۱۹۰۸ به‌نظریهٔ مجموعه‌ها، نخستین بنیادهای اصل موضوعی را داد. این بنیادها، بعداً با کارهـای پول برنیس (Paul Bernays) (متولد ۱۸۸۸)، ویلهلم آکرمن (Wilhelm Ackermann) (۱۸۹۶ - ۱۹۶۳) و یوهان فون نومان (Tohann von Neumann) (۱۹۰۳ - ۱۹۵۷)، شاگردان وهمکاران هیلبرت، تکامل خود را ادامه داد.

فون‌نومان درسال ۱۹۲۹ خواسته است‌کـه مجموعه‌هـای «خیلی وسیع»، یعنی‌مجموعه‌هایی‌که قوت‌آنها برابر یابزرگتر از قوت‌مجموعهٔ همهٔ اشیاء باشد، به‌عنوان مجموعه درنظرگرفته نشود.

در سال ۱۹۰۰، سزار بورالی - فورتی، برتراند راسل و ژول ریشار، پارادوکس‌هایی راکه دربند ۳۱ ازآنها یادکردیم، ارائه دادند.

۳. شهودگرائی و شکل‌گرائی

الف)لئوپولد کرونکر (Leopold Kronecker) (۱۸۲۳-۱۸۹۱) را می‌توان پیشگام شهودگرایان دانست. جملهٔ معروف «خدا عـددهای درست را آفرید، ولی آفـرینش بقیهٔ عددها کار انسان است»، بیانگـر دیدگاه بنیادی شهودگرایان است. کرونکـر، قسمت عمدهٔ نتیجه‌هـای نظریهٔ مجموعه‌های شاگردش‌کانتور را ردکرد. او می‌گفت: «من اعتقاد دارم‌که زمانی موفق خواهند شد، تمامی محتوی ضابطه‌های ریاضی را «حسابی»کنند. یعنی، سرانجام منحصراً مفهوم عدد را به‌عنوان پایگاه عزیمت خواهند پذیرفت و هر مفهوم دیگری را دور خواهند ریخت کـه ازآن جمله است: همهٔ تبدیل‌ها وگسترش‌های مفهوم عدد (به‌ویژه‌مفهوم عددهای‌گنگ وکمیت‌هایی‌که به‌یاری پیوستگی تعریف شده است).

ب) هرمان ویل (Hermann Weyl) (۱۸۸۵ - ۱۹۵۵)، در نوشته‌های خود، طرح نظریهٔ مجموعه‌ها، مفهوم‌ها و روش‌ها را برمبنای شکل‌گرایی، به‌شدت مورد انتقاد قرارداده است. درمیان نوشته‌های او،

می‌توان از «پیوسته» ۱۹۱۸، «اندیشه‌هایی در مورد بحران بنیادهای ریاضی» ۱۹۲۱ و «دانش و فلسفه ریاضیات» ۱۹۲۶، نام برد. ویل می‌گوید: «حکمی از این نوع که مثلاً «یك عدد زوج وجود دارد» و تنها یك اعلام وجودی است، نمی‌تواند با یك گزاره، که معرف حالتی از چیزهاست، دعوی برابری کند. این یك اختراع منطق دانان و عاری از معناست».

پ) شدیدترین حمله‌ها علیه شکل گرایان، از جانب براور (Luiszen Eglertus jan Brouwer) (متولد۱۸۸۱) به‌عمل‌آمد. از جمله‌آثار او اینهاست: «دربارهٔ بنیاد دانش» ۱۹۰۷، «شهودگرائی و شکل‌گرائی» ۱۹۱۲، «عکس‌العمل شهودگرا درمقابل‌شکل‌گرا»۱۹۲۸. او مثلاً می‌گوید: «. . . من دو حکم زیر را شنیده‌ام: ۱.، ...، ۲. اصل موضوعی که در سال ۱۹۰۰ به‌وسیلهٔ هیلبرت تنظیم شده است و مدعی است که تصمیم گرفتن در مورد هر مسأله، هم‌ارز با ضابطهٔ منطقی نفی ثالث است. ولی برای این اصل موضوع هیچ توجیه قانع‌کننده‌ای وجود ندارد، این اصل از منطق به ریاضیات تحمیل شده است و نه برعکس. بنابراین، ضابطهٔ نفی ثالث، یك روش ریاضی اثبات نیست...».

ت) داوید هیلبرت (David Hilbert) (۱۸۶۲ ـ ۱۹۴۳) با توجه به‌آثارش، خود را جدی‌ترین مدافع شکل‌گرائی، دربرابر شهودگرائی، معرفی‌کرده است. کتاب «بنیادهای هندسهٔ» او در سال ۱۸۹۹ منتشر و درسال ۱۹۶۲، برای نهمین بار چاپ شد. او در «بنیادهای ریاضیات» (منتشر شده در سال ۱۹۲۸) می‌نویسد: «من می‌خواهم آن حسن شهرت ریاضیات‌را به‌آن‌برگردانم که می‌گفت: ریاضیات هرگزجزحقیقت انکارناپذیر را نمی‌گوید؛ حسن شهرتی راکه‌ظاهراً با ظهور پارادوکس‌ها در نظریهٔ مجموعه‌ها، ازدست داده است. من‌می‌گویم که رسیدن به‌این هدف

امکان‌پذیراست وروشی راکه من‌برای‌رسیدن به‌آن‌پیشنهادمی‌کنم، روش اصل‌موضوعی‌است». هیلبرت بااین‌روش‌که مفهوم عدد درست رابگیریم و باتعمیم‌های پی‌درپی‌آن، به‌مفهوم عددحقیقی برسیم، مخالفت‌می‌کند: «با وجود ارزش زیادی‌که این روش دارد، من روش اصل موضوعی را ترجیح می‌دهم. برای ارائهٔ نهائی نتیجه‌گیری‌ها، تنهـا منطق ریاضی است‌که می‌تواند دقت مورد لزوم را برای ما تأمین‌کند».

§ ۳۵. گسترش‌های جدید

۰۱ جبر بول

الف) قبلاً لایپ‌نیتز اندیشهٔ«شکل‌گرائی عمومی» را تنظیم‌کرده بود، ولی باید منتظر ژرژ بول (George Boole) (۱۸۱۵ ـ ۱۸۶۴) می‌ماندیم، تاآن‌را به‌صورت قابل‌عرضه‌ای تحقق بخشد[۱].

ب) جبر بول را می‌توان اینطور تعریف‌کرد:

برای عضوهای a، b، c، ... از مجموعهٔ $E=\{a, b, c, \ldots\}$ عمل‌هائی رابا نشانه‌های $\cap$ و $\cup$ تعریف می‌کنیم‌که در اصل موضوع‌های زیر صدق‌کنند:

جا به‌جائی: ۱) $a\cup b=b\cup a,\ a\cap b=b\cap a$

شرکت‌پذیری: ۲) $a\cup(b\cup c)=(a\cup b)\cup c$

$a\cap(b\cap c)=(a\cap b)\cap c$

پخشی: ۳) $a\cup(b\cap c)=(a\cup b)\cap(a\cup c)$

۱. بول این‌کار را در اثر معروف خود به‌نام
The mathematical analysis of logic
انجام داده است.

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$

اختلاط: ۴) $a \cup (a \cap b) = a$، $a \cap (a \cup b) = a$

وجودعضوخنثی: ۵) $a \cup n = a$، $a \cap e = a$

وجود عضومعکوس: ۶) $a \cup a' = n$، $a \cap a' = e$

تحقق مجموعه‌هایی که در این اصل موضوع‌ها صادق باشند، به‌طریقه‌های زیادی امکان‌پذیر است.

مثال. هرگاه E یك مجموعه و $\mathscr{P}(E)$ مجموعهٔ زیر مجموعه‌های E، و $\cup$ و $\cap$ عمل‌های اجتماع و اشتراك تعریف شده روی $\mathscr{P}(E)$ باشند. واگر برای عضوهای خنثی، زیر مجموعه‌های $\varnothing$ و E وبرای معکوس عضو A، زیرمجموعهٔ $A' = E - A$ در نظر گرفته شود، آن‌وقت مجموعهٔ $\mathscr{P}(E)$ با همهٔ اصل موضوع‌های فوق، سازگار خواهد بود.

جبر بول، برای نظریهٔ‌نهادها (Lathéorie des structures) و رابطه‌ها، اهمیت جدی دارد.

۲. منطق ریاضی

الف) یك دستگاه اصل‌موضوعی، باید دارای‌این ویژگی‌ها باشد:

۱) مستقل باشد، ۲) کامل باشد، ۳) بی‌تناقض باشد، یعنی:

۱) هیچ اصلی متکی برنتیجه‌گیری منطقی اصل قبلی نباشد،

۲) دستگاه موردنظر، قادرباشد درست‌یا نادرست بودن‌هرادعائی را بدون ابهام مشخص‌کند،

۳) ازچنین دستگاهی نتوان، هم یك‌گزاره و هم‌گزارهٔ نقیض آن را نتیجه‌گرفت.

ب) ریاضی‌دانانی‌که خواسته‌اند سازگاری نظریهٔ عددها، آنالیز ریاضی و نظریهٔ مجموعه‌ها را با این سه‌قاعده ثابت‌کنند، به دشواری‌-های زیادی برخوردکرده‌اند گولت‌لوب‌فرژ (Goltlob Frege) (۱۸۴۶-

۱۹۲۵) برای برطرف کردن این دشواری‌ها، کوشید تا مفهوم عدد را به‌ملاحظه‌های منطقی خالص تبدیل کند[۱].

ریاضی‌دانان آلفرد نورث‌وایتهد (Alfred North Whitehead) (۱۸۶۱-۱۹۴۷)و برتراند راسل (Bertrand Russel) (۱۸۷۲-۱۹۷۳)، این راه را ادامه دادند[۲].

بالاخره گرهارد گنتزن (Gerhard Gentzen) (۱۹۰۵ - ۱۹۴۵)، درسال ۱۹۳۶ توانست ثابت‌کند که نظریهٔ عددها، با اصل عدم تناقض سازگار است.

پول لورنزن (Paul Lorenzen) (متولد ۱۹۱۵)، عدم تناقض را برای‌آنالیز ثابت‌کرد[۳].

پ) گودل (Kurt Gödel) (متولد ۱۹۰۶)، نشان‌دادکه اثبات ضابطهٔ عدم تناقض به‌کمك یك شکل‌گرائی کلی ممکن نیست. یعنی با استفاده از منطق ریاضی ونظریهٔ عددها و استفاده از تنها وسیلهٔ شکل‌گرائی، نمی‌توان وجود عدم‌تناقض را برای‌نظریهٔ مجموعه‌ها ثابت‌کرد. بین‌کارهای تازه دراین زمینه، می‌توان از کارهای‌به‌کر (Becker) وفری (Frey) نام برد[۴].

---

۱. درکتابهای

Les concepte mathématiques (1879)،

Les fondements de l'arithmétique (1884).

۲. درکتاب Principia Mathematica (۱۹۱۰-۱۹۱۳).

۳. درکتاب

Justification constructive des mathématiques.

۴. به‌ترتیب درکتاب‌های

Fondements de la mathématique (1954)،

Logique mathématique.

۳. مکتب بورباکی

از سال ۱۹۳۴ به این طرف، گروهی از ریاضی‌دانان فرانسوی، با چاپ کتاب‌هایی تحت نام‌مستعار نیکلا بورباکی، درك تازه‌ای ازعنصرهای پایه‌ای ونگرش جدیدی از نهادهای ریاضی، در زمینه‌های مختلف را ارائه داده‌اند.

طرفداران مکتب بورباکی درسه زمینهٔ جبر، آنالیز و هندسه، براساس سه مقولهٔ نهاد بنیادی، کار کرده‌اند: نهادهای جبری، نهادهای توپولوژیك ونهادهای‌ترتیبی. همین درك به‌خصوص توانسته است برای‌تابع، تعریف دقیقی پیدا کندکه ازتعریف بسیار مقدماتی‌معادله یا نمودار فراتررفته است.

یادداشت. این‌کتاب تنها مقدمه‌ای بر نظریهٔ مجموعه‌هاست، و به‌همین مناسبت از ارائهٔ بنیادهای اصل موضوعی چشم پوشیده‌ایم. همچنین تا حدامکان از واردکردن تعداد زیادی نماد و تعریف جدید دوری جسته‌ایم. اگر خواننده بخواهد در این زمینه‌ها، آگاهی‌های عمیق‌تری پیداکند، باید به‌کتاب‌های تخصصی‌تری مراجعه‌کند.

هدف ما ازآوردن تمرین‌های متعدد، کمك به‌درك بیشتر آن بوده است. در طول سال‌ها، به‌آموزش ریاضی ایراد گرفته‌اند که به‌شاگرد، نسخه‌هایی یاد داده می‌شود، بدون اینکه توجه شود که آیا مفهوم‌های اصلی‌را فهمیده است یانه. آموزش‌کنونی‌ریاضیات باید برمعیاری قرار گیردکه باانباشتن ذهن‌شاگرد به‌وسیلهٔ انبوهی ازآگاهی‌ها، دچارافراط نشود وامکان استفادهٔ از آنچه را که یادگرفته است، ازشاگرد نگیرد. گفتهٔ براور را از یاد نبریم‌که: «ریاضیات بیشتر یك شیوهٔ پراتیك و عمل است تاشیوهٔ یادگرفتن».

XII. تکرار اجمالی

§ ۳۶. تعریف‌ها وقضیه‌های مهم

ـ مجموعه عبارتست از اجتماع گروهی چیز دریك کل، به‌نحوی که‌احساس‌یاادراك‌ما، توانائی تمیز وتشخیص آن‌را داشته باشد. هرکدام از این چیزها، یك‌عضو ازمجموعه هستند.

ـ دومجموعه برابرند، وقتی‌که عضوهای‌آنها یکی باشد.

ـ مجموعهٔ F، یك بخش یا یك‌زیر مجموعه از مجموعهٔ Eاست، وقتی‌که هرعضو F، عضوی از E هم‌باشد.

ـ اگر F اکیداً مشمول E باشد، متمم F (نسبت به‌E)عبارتست از مجموعه عضوهائی از E که به F تعلق ندارند.

ـ اجتماع دو مجموعه عبارتست از مجموعهٔ همهٔ عضوهایـی‌که دست‌کم متعلق به‌یکی از دومجموعه باشند.

ـ اشتراك دومجموعه عبارتست از مجموعهٔ عضوهایی که درعین حال عضو هردو مجموعه هستند.

ـ دومجموعه را هم‌توان‌گویند، وقتی‌که بین‌عضوهای آنها، یك تناظر دوسوئی وجود داشته باشد.

ـ اگر هیچ زیر مجموعهٔ محضی ازمجموعهٔ E هم‌توان E نباشد، E یك مجموعهٔ متناهی است.

اگر دست‌کم یك زیر مجموعهٔ محض از مجموعـهٔ E هم‌توان E باشد، E یك‌مجموعهٔ نامتناهی است (ددکیند).

ـ مجموعهٔ عددهای اول شمارا است.

ـ مجموعهٔ عددهای درست (صفر، مثبت یامنفی) شمارا است.

ـ مجموعهٔ عددهای‌گویا شمارا است.

ـ مجموعهٔ عددهای جبری شمارا است.

ـ مجموعهٔ عددهای حقیقی ناشمارا است.

ـ مجموعهٔ عددهای حقیقی غیر جبری (متعالی) ناشمارا ودارای قوت متصله است.

ـ مجموعهٔ تابع‌های با مقادیر حقیقی، که‌روی $0 < x < 1$ تعریف شده باشد، قوتی بزرگتر از قوت متصله دارد.

ـ مجموعهٔ تابع‌های پیوسته‌با مقادیرحقیقی، که روی $0 < x < 1$ تعریف شده باشد، دارای قوت متصله است.

ـ به‌هر مجموعهٔ نامتناهی، می‌توان مجموعه‌ای نسبت داد که قوتی بزرگتر از قوت این مجموعه داشته باشد.

ـ مجموعهٔ همهٔ‌زیرمجموعه‌های یك‌مجموعه، دارای قوتی‌بزرگتر از قوت این مجموعه است.

ـ اگر مجموعهٔ E با زیر مجموعهٔ Q ازمجموعهٔ F هم‌توان‌باشد، وبرعکس، F هم‌توان زیر مجموعه P از E باشد، دراین‌صورت E و F هم‌توان هستند.

ـ یك‌نگاشت‌دوسوئی $f(x)$ ازیك‌مجموعهٔ X به‌روی یك‌مجموعهٔ مرتب Y، یك « یك دیسگی » است وقتی که رابطه‌های $x_1 \leqslant x_2$ و $f(x_1) \leqslant f(x_2)$، هم‌ارز باشند.

ـ مجموعه‌های X و Y یك‌دیسه هستند وقتی‌که یك «یك‌دیسگی» از X به‌روی Y وجود داشته باشد.

ـ اگر E یك مجموعهٔ کاملاً مرتب و F یك مجموعهٔ هم‌توان E باشد، دراینصورت F را می‌توان طوری مرتب کرد که E و F یك‌دیسه باشند.

ـ هرمجموعهٔ متناهی خوش‌ترتیب است.

ـ هرمجموعه‌ای می‌تواند خوش‌ترتیب باشد (زرمه‌لو).

ـ هرمجموعهٔ متناهی‌کرانه‌دار، دست‌کم دارای یك‌نقطهٔ‌انباشتگی است (قضیهٔ بولزانو ـ وایرشتراس).

§۳۷. پاسخ تمرین‌های متن

§۱. ۱. شاگردان، گل‌ها، صندلی‌ها وغیره.

۲. نه! $\frac{۱}{۴}$ و ۰/۲۵ دوچیز مختلف نیستند، تنها دو بیان مختلف از یك چیزند.

۳. نه! این‌مجموعه شامل نقطه‌های به‌مختصات درست (۳±،۲±) و (۲±، ۳±) است.

۴. $\left\{\frac{۸}{۹}, \frac{۷}{۹}, \frac{۷}{۸}, \ldots, \frac{۲}{۵}, \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۹}, \ldots, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲}\right\}$ رویهم‌شامل ۲۶ عضو.

۵. عکس ۲۶ کسر تمرین قبل، از واحد بزرگترند، منتهی عکس ۸ کسر $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، ...، $\frac{۱}{۹}$، عددهایی درست‌اند وکسر نیستند.

۶. {۱، ۷}.

۷. {۱۰، ۰، ۱۱−}.

۸. ∅

۹. ∅

۱۰. ۶۶ نقطه. به‌عنوان‌مثال، نقطه‌های (۰، ۰،۱۳)، (۰، ۱۳−، ۰)، (۵−،۰، ۱۲)، (۰، ۱۲، ۵)، (۱۲،۴−، ۳)، (۴−، ۱۲، ۳−) و غیره.

۱۱. همهٔ عددهای طبیعی بزرگتر از واحد.

۱۲. همهٔ عددهای حقیقی، به‌نحوی که $x > ۵$ یا $۳ > x$ باشد.

§۲. ۱. چهار مجموعه برابرند.

۲. بله.

۳. بله.

۴. نه. نقطه‌های به‌مختصات‌درست $(\pm ۱ ، \pm ۱)$ هنوز به $E_۲$ تعلق دارند، درحالی‌که متعلق به $E_۱$ نیستند.

۵. نه. هرعضومجموعهٔ اول یك‌خط وهرعضو مجموعهٔ دوم یك‌نقطه است.

۶. بله.

۷. الف) نه؛ زیرا $a < a$ نداریم. ب) نه، زیرا از $a < b$ نمی‌توان $b < a$ را نتیجه گرفت. این دو رابطه نامتقارن‌اند. پ) بله:

$$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$$

۸. بله.

۹. این گزاره درست نیست.

۱۰. نه، زیرا داریم: $S.S = \{۰\} \neq \varnothing$ شامل یك‌عضو است: عدده.

§۳. ۱. این مجموعه به‌اندازهٔ $۱۶ = ۲^۴$ زیر مجموعه داردکه عبارتندار:

$\varnothing$،

$\{۲\}$، $\{۳\}$، $\{۵\}$، $\{۷\}$،

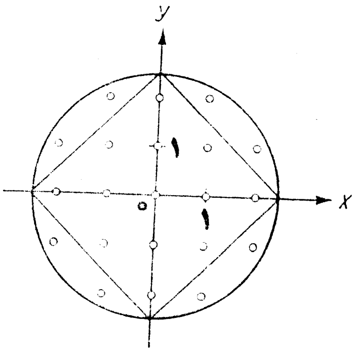
$\{۲، ۳\}$، $\{۲، ۵\}$، $\{۲، ۷\}$، $\{۳، ۵\}$، $\{۳، ۷\}$، $\{۵، ۷\}$،

$\{۲، ۳، ۵\}$، $\{۲، ۳، ۷\}$، $\{۲، ۵، ۷\}$، $\{۳، ۵، ۷\}$،

$\{۲، ۳، ۵، ۷\}$

۲. $C_{۱۰}^{۶} = ۲۱۰$ تیم. برای هرتیم به‌اندازهٔ $۶! = ۷۲۰$ امکان‌جادادن بازیکن‌ها وجود دارد.

۳. زیر مجموعه به‌مفهوم عام‌آن، اگر همهٔ دانش‌آموزان کلاس نهائی در امتحان نهائی پذیرفته شوند، خود مجموعه ودرغیر اینصورت، زیرمجموعهٔ محض آن خواهد بود.



شکل ۵۱. برای تمرین ۷

۴. بله.

۵. $E-F=\varnothing$.

۶. $E=\{a, b, c, d, e\}$.

۷. الف) ۲۱، ب) ۱۳، پ) $C_2 \subset C_1$، ت) مجموعهٔ متمم مجموعهٔ C_1 نسبت به C_2 عبارتست ازمجموعهٔ ۸ نقطه به‌مختصات‌درست $(\pm 2, \pm 1)$ و $(\pm 1, \pm 2)$، ث) شکل۵۱.

§۴ ۱. الف) $\{a, b, c, d, e, g\}$،
ب) $\{b, c, d, e, f, g\}$،
پ) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$،
ت) $C-B=\{c, d, f\}$

۲. همهٔ رابطه‌ها درست‌اند. درآخری حتی می‌توان $\Rightarrow$ را به $\Longleftrightarrow$ تبدیل کرد.

۳. $A=B=C=\varnothing$.

۴. نه، زیرا $F \subset E \Rightarrow E \cup F=E$، ولی $E \cup F=E \Rightarrow F \subset E \vee F=E$، یعنی $F \subseteq E$.

۵. ثابت‌کنید که $E \subseteq F$ و هم $F \subseteq E$.

§۵. ۱. $\{b, c\}$، $\varnothing$، $\varnothing$، $\varnothing$.

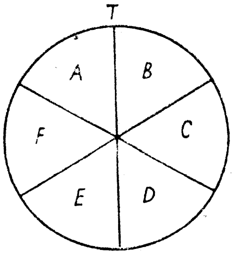
۲. $\{2, 4\}$، $\varnothing$، $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$، $\{4\}$، R.

۳. $E \subseteq F$ و $F \subseteq E \Rightarrow E=F$.

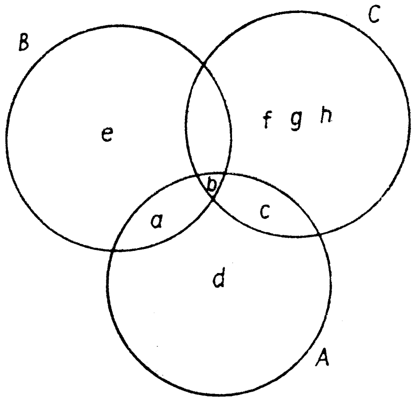
۴. طرحی بسازید.

۵. $A \subseteq B \subseteq C$.

§۶. ۱. شکل ۵۲.



شکل ۵۳. افراز مجموعهٔ T

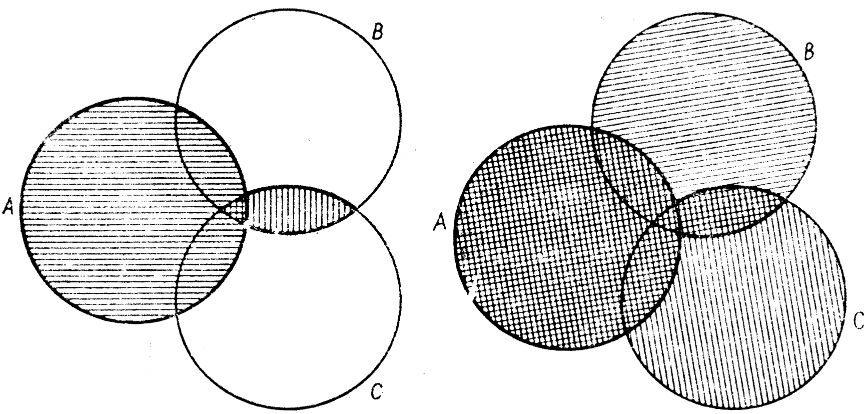


شکل ۵۲. دیاگرام برای مجموعه‌های A، B، C

۲. شکل ۵۳.

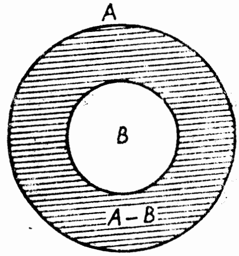
۳. شکل ۵۴.

۴. شکل ۵۵.



شکل ۵۴. دیاگرام برای قانون پخشی

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$$



شکل ۵۵. مجموعهٔ متمم $A-B$

۵. رابطهٔ پخشی $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

§۷. ۱ . پاها وکفش‌ها، گوش‌ها وچشم‌ها وغیره.

۲ . $۴!=۲۴$ نگاشت از E به‌روی خودش ممکن است:

$a\longleftrightarrow d$ $b\longleftrightarrow c$ $c\longleftrightarrow b$ $d\longleftrightarrow a$	یا	$a\longleftrightarrow a$ $b\longleftrightarrow b$ $c\longleftrightarrow d$ $d\longleftrightarrow c$	یا	$a\longleftrightarrow a$ $b\longleftrightarrow b$ $c\longleftrightarrow c$ $d\longleftrightarrow d$	یا...

۳ . الف) $P\subset Q$،

ب) $P\cap Q=P$،

پ) $\text{card}\,(Q-P)=۱۲$،

ت) بله.

۴ . تنها تابع‌های الف)، ب)، پ) و ث).

۵ . باید نگاشت معکوس، تابعی را روی حوزهٔ مقادیر تابع مفروض، تعریف کند.

۶ . $\text{card}\ P=\text{card}\ Q=۲۱$

۷ . وقتی‌که برای هرمرد یك‌زن، وبرای هر زن یك مرد وجودداشته باشد.

۸ . $C=\{(۱,-۱),(۲,+۱),(۳,-۱),(۴,+۱),(۵,-۱)\}$

۹. $y=f(x)=5x^2$.

۱۰. نه. $\operatorname{card} Y < \operatorname{card} X$.

۱۱. نه. $\operatorname{card} X = 10$، $\operatorname{card} Y = 4$.

۱۲. بله $S=\{2\}$، $T=\{113\}$، $\operatorname{card} S = \operatorname{card} T$.

۱۳. $C=\{(-3, 4), (0, -5), (3, 4)\}$.

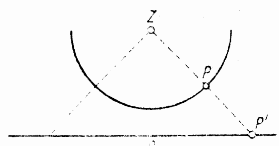
۱۴. $y=2x$.

۱۵. $\operatorname{card} N = \operatorname{card} P$. تابع $y=2x$ مجموعهٔ N را روی P می‌نگارد.

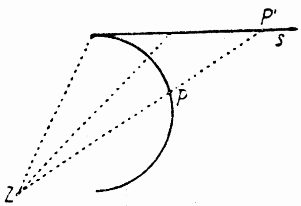
§۸. ۱. ضلع اول را به‌موازات ضلع سوم، روی ضلع دوم، تصویر کنید.

۲. $d=10^{n-1}$، $d \in D$ و $n \in N$.

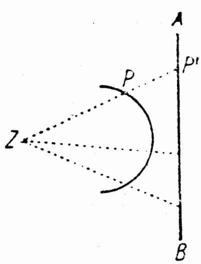
۳. الف) شکل ۵۶، ب) شکل ۵۷، پ) شکل ۵۸.



شکل ۵۶. تناظر یك نیم‌دایره و یك خط.



شکل ۵۷. تناظر یك نیم‌دایره و یك نیم خط



شکل ۵۸. تناظر یك نیم‌دایره و یك پاره‌خط

۴. $n!$.

۵. در هیچ حالتی، متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌ها، در تعریف‌ها و عمل‌هائی که در بخش یکم آوردیم، دخالتی نداشته است.

§۹. ۱. بله! همهٔ سه‌تائی‌های فیثاغورث (x،y،z) رامی‌توان به‌ترتیب‌زیر تعریف کرد:

$$x=m^{۲}-n^{۲},\ y=۲mn,\ z=m^{۲}+n^{۲}$$

$$(m>n; m,n\in N)$$

دراینصورت، می‌توان‌سه‌تائی‌های (x،y،z) را با مرتب کردن‌زوج (m،n)، مرتب کرد. درجدول‌زیر، m مجموعهٔ عددهای درست‌را می‌پیماید و n همهٔ مقادیر از ۱ تا (۱ — n) را اختیار می‌کند.

m	n	x	y	z
۲	۱	۳	۴	۵
۳	۱	۸	۶	۱۰
۳	۲	۵	۱۲	۱۳
۴	۱	۱۵	۸	۱۷
۴	۲	۱۲	۱۶	۲۰
۵	۱	۲۴	۱۰	۲۶
۵	۲	۲۱	۲۰	۲۹
۵	۳	۱۶	۳۰	۳۴
۵	۴	۹	۴۰	۴۱
۶	۱	۳۵	۱۲	۳۷
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

به‌این‌ترتیب ثابت می‌شود که مجموعهٔ‌سه‌تائی‌های فیثاغورث‌شمارا است ومی‌توان آنها را به‌صورت رشتهٔ زیر درآورد:

$$\{(۳,۴,۵), (۸,۶,۱۰), (۵,۱۲,۱۳), (۱۵,۸,۱۷), \ldots\}$$

۲. $T=\{۱, -۳, ۵, -۷, ۹, -۱۱, \ldots\}$، $\text{card } T=\text{card } N$.

۳. بله. این‌مجموعه را می‌توان با یک رشتهٔ نامتناهی از زوج‌عددهای درست، نمایش‌داد:

{(۰،۱)، (۴،۴)، (−۴، −۲)، (۸،۷)، (−۸، −۵)، ...}

۴. نه. این مجموعه، متناهی وبرابر است با:

{(۱،۱)، (−۱، −۱)}

۵. این مجموعه متناهی وحتی تهی است.

§۱۰. ۱. بله وبه‌عنوان مثال، واسطهٔ عددی‌آنها: $\frac{1}{2}(q_1+q_2)$.

۲. بندهای ۸ و۹ را ببینید.

۳. اگر روش قطری را درمورد زوج‌های مرتب عددهای درست:

(۱،۱)، (۱،۲)، (۱،۳)، ...

(۲،۱)، (۲،۲)، (۲،۳)، ...

(۳،۱)، (۳،۲)، (۳،۳)، ...

...   .

به‌کاربریم، به‌دست می‌آید:

{(۱،۱)، (۱،۲)، (۲،۱)، (۳،۱)، (۳،۲)، ...}

واگرنقطه‌های واقع برمحورهای مختصات را هم‌درنظر بگیریم، این رشته از (۰،۰) آغاز می‌شود.

۴. اگر به‌دنبال هرجمله ازتمرین‌قبل، جمله‌های حاصل از ترکیب علامت‌ها، در همه حالت‌های ممکن‌را قراردهیم، نتیجه‌می‌شود:

{(۰،۰)، (۰،۱)، (۰، −۱)، ...، (۳،۴)، (۳، −۴)،
(−۳، −۴)، ...}

۵. بله.

§۱۱. ۱. به‌عددهایی‌که دربند ۳.۱۱، معین‌کردیم، عددهای نظیر معادله‌های جبری رتبهٔ ۵ را می‌افزاییم، یعنی عددهای:

$$\pm\frac{1}{3},\ \pm 3,\ \pm\sqrt{-\frac{1}{2}},\ \pm\sqrt{\pm 2},\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}$$

۲. $\sin 7/5^\circ$ یک‌عدد جبری است، زیرا

$$\sin 7/5^\circ=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 15^\circ)}\ ,\ \cos 15^\circ=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 30^\circ)}$$

ولی $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. به‌طورکلی، اگر α برحسب درجه وضمناً عددی گویا باشد $\sin\alpha$ یک‌عدد جبری‌است. درحالی‌که اگر α برحسب رادیان وضمناً عددی‌گویا (مخالف صفر) باشد، $\sin\alpha$ یک‌عدد غیرجبری است.

۳. بله. این‌مجموعه، زیر مجموعه‌ای نامتناهی از مجموعهٔ‌عددهای جبری است.

۴. نه. π یک‌عدد غیرجبری است.

۵. بله. این‌مجموعه، زیرمجموعه‌ای نامتناهی از مجموعهٔ‌عددهای جبری است.

§۱۲. ۱. استدلال شبیه استدلالی‌است که‌در بند ۶.۱۲، برای مجموعهٔ‌نقطه‌های یک‌مکعب به‌کار بردیم.

۲. برای هر عدد موهومی $z\in C$ می‌توان نوشت: $z=x+iy$. درنتیجه

$$\text{card } C=\text{card }\{(x,y)\,|\,x,y\in R\}=\text{card } R=\gamma$$

۳. $\text{card } N$.

۴. بله.

۵. مجموعهٔ $X=\{x\,|\,x=m^n,\ m,\ n\in N\}$ دارای قوت‌مجموعهٔ $Y=\{(m,\ n)\,|\,m,\ n\in N\}$ است.

ولی $\text{card } Y=\text{card } N^2=\text{card } N$. و این به‌سادگی و با روش قطری ثابت می‌شود.

۶. فرض می‌کنیم:
$$E_1=\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\},$$
$$E_2=\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\dots$$

دراین‌صورت داریم:
$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots=\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{14}, \dots\}$$

۷. از $x=\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}$، باسه‌بارمجذورکردن، نتیجه‌می‌شود که x جواب یك معادلهٔ درجهٔ هشتم است:
$$x^8-4ax^6+(6a^2-2b)x^4+4a(b-a^3)x^2+ +a^4-2a^2b+b^2-c=0$$
پس X دارای قوت شماراست.

۸. داریم:
$$\frac{a+b\sqrt{5}}{c+d\sqrt{5}}=\frac{(a+b\sqrt{5})(c-d\sqrt{5})}{(c+d\sqrt{5})(c-d\sqrt{5})}=$$
$$=\frac{ac-5bd+(bc-da)\sqrt{5}}{c^2-5d^2}$$
عددهای $\frac{ac-5bd}{c^2-5d^2}$ و $\frac{bc-da}{c^2-5d^2}$ گویا هستند. پس‌مجموعهٔ X دارای قوت مجموعهٔ $Y=\{(x, y) \mid x, y \in Q\}$ می‌باشد:
$$\text{card } Y=\text{card } N^2=\text{card } N$$
X شماراست.

۹. الف) دربند ۲.۱۲ ثابت‌شده است‌که X مانند مجموعه R دارای قوت پیوسته است. از $X \subset Y \subset R$ نتیجه می‌شود:
$$\text{card } X=\text{card } Y, \text{card } Y=\text{card } R$$
ب) از X و Y، دومجموعهٔ‌شمارای $\bar{A}$ و A را درمی‌آوریم، مثلاً
$$A=\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\}, \bar{A}=\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$$
با همراه‌کردن عضوهائی‌که دارای یك ردیف هستند، یك‌نگاشت

دوسوئی از $\mathring{A}$ روی $\bar{A}$ نتیجه‌می‌شود. چون مجموعه‌های $X - A$، $Y - \bar{A}$ برابرند، آنهانیز بایك نگاشت دوسوئی نظیر می‌شوند. از اجتماع نگاشت‌هایی که به‌این‌ترتیب تعریف‌شده‌اند، یك‌نگاشت دوسوئی از X به‌روی Y به‌دست می‌آید.

۱۰. الف) $X = \{x \mid x < ۱\}$، $\text{card } X = \text{card } R_۱$.

ب)

$$Y = \{y \mid \sin y = \cos y\} = \left\{y \mid y = n\pi + \frac{\pi}{۴} \wedge n \in N\right\}$$

$$\text{card } Y = \text{card } N$$

§۱۳. ۱. مجموعهٔ زوج‌های مرتب عددهای حقیقی $(c_۱, c_۲)$، دارای‌قوت پیوسته است.

۲. به‌هرسه‌تائی (a, b, r)، یك‌دایره نظیر است. پس‌قوت‌مجموعهٔ مورد نظر، برابر قوت مجموعهٔ این سه‌تائی است که برابر با $\text{card } R_۱$ است.

۳. $۱ < ۲ < ۳ < ۴ < \ldots < \text{card } N < \text{card } R_۱ < \text{card } F_۱$

۴. $\text{card } R_۱$.

۵. اثبات، شبیه اثبات بند ۲.۱۳ می‌باشد.

§۱۴. ۱. بله. اگر دومجموعهٔ E و F دارای یك قوت‌باشند، هیچ‌کدام از آنها، هم‌توان زیر مجموعه‌ای از دیگری نیست.

۲. $J = \{۳, ۷, ۱۱, \ldots\}$ و $Q = \{۲, ۶, ۱۰, \ldots\}$ را اختیار می‌کنیم، در این صورت $J \subset I$ ، $Q \subset P$. بعلاوه بنا به‌وجود نگاشت‌های $j = ۲p - ۱$ و $q = ۲i$ داریم:

$$\text{card } Q = \text{card } I, \quad \text{card } J = \text{card } P$$

۳. بخش EF از AB روی CD با یك تصویر مرکزی به مرکز $Z_۱$ وبخش GH از CD روی AB با یك تصویه مرکزی به مرکز $Z_۲$ تصویر شده است.

§۱۵. ۱. از $\alpha+\alpha=\alpha$ نتیجه می‌شود: $\alpha+(\alpha+\alpha)=\alpha+\alpha=\alpha$.
و با یك استدلال بازگشتی: $n.\alpha=\alpha$.

۲. مجموعهٔ D نقطه‌های به‌مختصات درست خط عددی، هم‌توان مجموعهٔ عددهای درست، ودرنتیجه دارای قوت‌شمارا است.
مجموعهٔ P_1 نقطه‌های خط عددی نیز دارای قوت متصله است.
مجموعهٔ $S=D\bigcup P_1$، دارای‌قوت$\alpha+\gamma$ورابطه$P_1\subset S\subset P$ نتیجه‌ای است از

$$\text{card } P_1 < \text{card } S < \text{card } P$$

بالاخره $\gamma\leqslant\alpha+\gamma\leqslant\gamma$ و $\alpha+\gamma=\gamma$.

۳. بله.

§۱۶. ۱. نه. تنهااگر $p<n$ باشد این‌رابطه درست است. درحالت$p\geqslant n$ داریم: $m.p=n.p$.

۲. به‌عنوان مثال فرض می‌کنیم:

$$E_1=\{۲، ۲^{۲}، ۲^{۳}، ۲^{۴}، ...\},$$
$$E_2=\{۳، ۳^{۲}، ۳^{۳}، ۳^{۴}، ...\},$$
$$E_3=\{۵، ۵^{۲}، ۵^{۳}، ۵^{۴}، ...\},$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$E_i=\{p_i، p_i^{۲}، p_i^{۳}، p_i^{۴}، ...\}$$

که درآنها، p_iها، عددهایی اول‌اند. دراین‌صورت

$$E_0=\{۱، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ...\}$$

شامل‌همهٔ عددهای درستی است که عضوی ازمجموعهٔ E_iنیستند.

§۱۷. ۱. $\text{card}(M^P)=۳^{۱۲}=۵۳۱۴۴۱$

۲. $۰<y<۱$.

۳. $Y=\{-۱،+۱\}$.

۴. اگر E و F دو مجموعه باشند، به قسمی که داشته باشیم: $\text{card } E = m$ و $\text{card } F = ۱$، تنها پوشش ممکن E به‌وسیلهٔ F عبارتست از پوشش حاصل از پوشاندن همهٔ عضوهای E با یگانهٔ عضو F. پس مجموعهٔ پوشش‌های E به‌وسیلهٔ F دارای قوتی‌برابر $۱ = ۱:۱^m$ می‌باشد. پوشش‌های ممکن F به‌وسیلهٔ E عبارتست از m پوشش، نظیر m امکان پوشاندن عضو F با یک عضو E. و ازآنجا $m^۱ = m$.

۵. بنا به‌خاصیت جابه‌جائی ضرب عددهای اصلی

$$m^p . n^p = m.m \ldots n.n \ldots = (m.n).(m.n) \ldots = (m.n)^p$$

۶. مجموعهٔ X $(\text{card } X = \gamma)$ با مجموعهٔ Y $(\text{card } Y = \alpha)$ پوشیده شده است، ولی $f = {}_{\alpha}{}^{\gamma}$.

§۱۸. ۱. تابع‌ها را به‌صورت صعودی مخرج‌ها مرتب می‌کنیم (وکسرهای با مخرج‌های برابر را با ردیف صعودی صورت‌ها). دراین‌صورت داریم:

$$\left\{\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۴}, \ldots\right\}$$

۲. $\{۰، \ldots، ۳-، ۳، ۲-، ۲، ۱-، ۱\}$،
$\{۱-، ۲-، ۳-، \ldots، ۰، \ldots، ۳، ۲، ۱\}$،
$\{۱-، ۳-، ۵-، \ldots ، ۰، \ldots، ۶، ۴، ۲، ۱، ۳، ۵، \ldots\}$،
$۲-، ۴-، ۶-، \ldots\}$

۳. مجموعهٔ $R_۱$ نه عضو اول دارد و نه عضو آخر. هیچ عضوی، یک‌عضو بلافاصله قبل وبلافاصله بعد ندارد.

§۱۹. ۱. هم‌توان‌اند، ولی یکدیسه نیستند.

۲. $\bar{B} = \{۲،۳،۴،۹،۸،۲۷،۱۶،۸۱، \ldots\}$. $\text{ord } \bar{B} = \text{ord } A$.

۳. $\bar{P}=\{\dots -۳۲، -۸، -۲، ۱، ۴، ۱۶، \dots\}$

§۲۰. ۱. $(۱+\omega)+({}^*\omega+۱)+\omega=\omega+{}^*\omega+\omega=$
$=\mathrm{ord}\{a، ۱، ۳، ۵، \dots، ۶، ۴، ۲، b، c_۱، c_۲، c_۳، \dots\}$

۲. $۱+\eta+۱$.

۳. بند ۲۰ را ببینید.

§۲۱. ۱. دوتائی‌ها را به‌ترتیب صعودی ردیف مــی‌کنیم: $r=x+y=$، $۲،۳،۳،۴،۴،\dots=$ و دوتائی‌های هم‌ردیف را، برحسب مقدار-های صعودی x، یعنی

$$D=\{(۱،۱)، (۱،۲)، (۲،۱)، (۱،۳)، (۲،۲)، (۳،۱)، \dots\}$$

۲. بندهای ۲.۱۰ و۳ را ببینید وتنها کسرهای تحویل ناپذیر را در نظر بگیرید.

۳. بله.

§۲۲. ۱. نه. آنها حتی هم‌توان‌هم نیستند.

۲. نه. هرقطعهٔ N، یك مجموعهٔ متناهی است.

۳. از رابطهٔ $\mathrm{ord}\{\dots، ۳، ۲، ۱\}=\mathrm{ord}\{\dots، ۳، ۲\}$ نیتجـه می‌شودکه $\bar{N}$ خوش‌ترتیب نیست.

§۲۳. ۱. مجموعه‌های Z، $Z_۱$، $Z_۲$ و$Z_۳$ خوش‌ترتیب هستند.

۲. $\mathrm{ord}\, Z=\omega$ یك عدد ترتیبی است. $\mathrm{ord}\,\bar{Z}={}^*\omega+\omega$ یك عدد ترتیبی نیست و

$\mathrm{ord}\, Z_۱=\omega+\omega=\omega.۲$، $\mathrm{ord}\, Z_۲=\omega+\omega=\omega.۲$ و
$\mathrm{ord}\, Z_۳=\omega+\omega+۱=\omega.۲+۱$، عددهای ترتیبی‌هستند.

۳. نه.

۴. اگر $\text{ord}\, E = \mu$ و $\text{ord}\, F = \mu + ۱$ باشد، قطعهٔ تعیین شده با آخرین عضوE، با E یکدیسه است.
۵. بله. با بی‌نهایت طریق.
۶. نه. مجموعه‌های دارای گونهٔ ترتیب $۱ + \eta$ دارای عضو اول نیستند و مجموعه‌های دارای گونهٔ ترتیب $\eta + ۱$ دارای زیرمجموعه‌هائی هستند که عضو اول ندارند.

§۲۴. ۱. $]۲ ، \frac{۱}{۲}[$.
۲. مجموعه‌ها برابرند.
۳. $X = \{x \mid x^۲ < ۱ \wedge x \in R\}$.

§۲۵. ۱. $x_۱ = \frac{n+۱}{۲n}$، $x_۲ = \frac{۱}{۲n}$ ونقطه‌های انباشتگی عبارتند از $\frac{۱}{۲}$ و ۰.
۲. هیچ مجموعهٔ متناهی، دارای نقطهٔ انباشتگی نیست. مجموعه‌های نامتناهی هم وجود دارند که دارای نقطهٔ انباشتگی نیستند، مثل $\{۱، ۲، ۳، ۴، ...\}$.
۳. بله. همهٔ نقطه‌های X، نقطه‌های انباشتگی ونقطه‌های فشردگی هستند. ضمناً نقطه‌های ۱ــ و ۱+ هم نقطه‌های فشردگی هستند که به X تعلق ندارند.

§۲۶. ۱. مجموع ترتیبی مجموعه‌های نقطه‌های گویای فاصله‌های $[۱ ، ۲[$، $]۲ ، ۳[$، $]۳ ، ۴[$، ...، $]n ، n+۱[$، عبارتست از مجموعهٔ نقطه‌های گویای فاصلهٔ $]۱ ، n+۱[$.
۲. مجموع ترتیبی مجموعه‌های نقطه‌های فاصله‌های $[۰ ، ۱[$، $[۱ ، ۲[$، ...، $[n-۱ ، n[$، عبارتست از مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های فاصلهٔ $[۰ ، n[$.
۳. راهنمائی

الف) اگر مجموعه کرانه‌دار باشد، کافی است درقضیهٔ بولزانو-وایرشتراس، به «صفت» نامتناهی «صفت» ناشمارا افزوده شود.
ب) اگر مجموعه کرانه‌دار نباشد، می‌توان آن را به‌فاصله‌هایی تقسیم کرد که دست کم یکی از آنها، شامل یك مقدار ناشمارا از نقطه‌ها باشد، که به‌این ترتیب، به‌حالت الف) برمی‌گردد.

§۲۷. ۱. نه. این مجموعه شامل نقطهٔ انباشتگی ۰ خود نیست.
۲. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های فاصلهٔ $[۱،۲]$.
۳. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های فاصلهٔ $[۱،۲]$.
۴. نه. این مجموعه شامل نقطه‌های گنگ این فاصله، که نقطه‌های انباشتگی نقطه‌های گویا هستند، نمی‌باشد.
۵. بله. با تمرین ۱ بند ۱۰ مقایسه کنید.
۶. نه. هر کدام از نقطه‌های این‌مجموعه، یك نقطهٔ انباشتگی است.
۷. بله، هم‌بسته و هم متمایزاست. مشتق هرمجموعهٔ نامشخص‌بسته است. مشتق مجموعهٔ مفروض عبارتست ازمجموعهٔ همهٔ نقطه‌های‌فاصلهٔ $[۲،۳]$. این‌مشتق بسته وبدون‌نقطهٔ منفرد وبنابراین کامل است.
۸. نه. چنین مجموعه‌ای تنها بسته است. مثلاً اگر داشته باشیم: $E=\{۰/۱، ۰/۰۱، ۰/۰۰۱، ...\}$، دراین صورت $E'=\{۰\}$، ولی ۰ نقطهٔ انباشتگی E' نیست.

§۲۸. ۱. از برهان خلف‌استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\frac{m}{n}=\sqrt{۲}$ وجود داشته باشد. از $m^۲=۲n^۲$ نتیجه می‌شود که m عددی است زوج، یعنی $m=۲k$ و $k\in N$. از از $m^۲=۴k^۲=۲n^۲$ نتیجه می‌شود $n^۲=۲k^۲$، واین مستلزم آن است که n هم عددی‌زوج باشد. زوج بودن هر دو عدد m و n متناقض با این فرض است

که m و n نسبت به‌هم اول‌اند.

۲. $\sqrt{5}$ عبارتست از یك رخنه، که همهٔ عددهای گویای $\frac{m}{n}$ با شرط $\frac{m^2}{n^2} < 5$ را ازعددهای گویای‌باشرط $5 < \frac{m^2}{n^2}$، جدا می‌کند.

۳. الف) یك شکاف، ب) یك رخنه، پ) یك برش پیوسته.

§۲۹. ۱. کافی است محاسبه را انجام دهید.

۲. بله $Y = \{]0, \ln 2]\}$.

۳. داریم: $\delta = 4\varepsilon = 4x_1\varepsilon$ وازآنجا: $\delta = 0/8, 0/08, 0/004$.

۴. $\delta = 10\varepsilon$ و ازآنجا $0/001 > \varepsilon$.

۵. نه. $x_1 = -1$ یك نقطهٔ ناپیوستگی و $x_2 = +1$ یـك نقطهٔ ناپیوستگی نابنیادی است. با فرض $f(x_2) = -\frac{1}{2}$ می‌توان‌تابع‌را با پیوستگی تعریف کرد.

۶. اگر تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ همه‌جا پیوسته باشند، درآن‌صورت، $y = \frac{f(x)}{g(x)}$، جز به‌ازای مقادیـری از x کـه ریشه‌های معادلهٔ $g(x) = 0$ هستند، همه‌جا پیوسته است.

۷. بله. اگرفرض شود که درجهٔ حرارت همهٔ مقادیر بین دو مقدار اندازه‌گرفته شده را اختیار می‌کند.

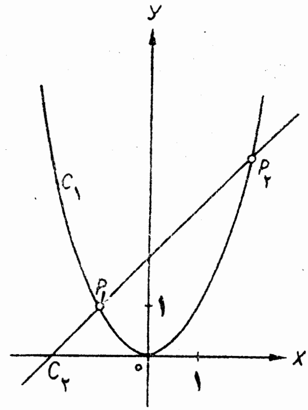
§۳۰. ۱. $C_1 \cap C_2 \{(0, 0)\} \neq \varnothing$. نمودارهای نظیر C_1 و C_2، محور-های مختصات هستند.

۲. الف) شکل ۵۹ را ببینید.

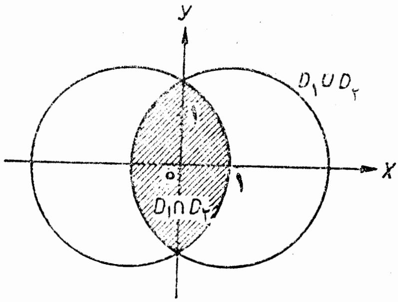
ب) $I = \{(-1, 1), (2, 4)\} = \{P_1, P_2\}$.

۳. شکل ۶۰ را ببینید.

۴. $\bigcap_{E_c} = \{(0, 0)\}$. نمودارمجموعهٔ E_cها عبارتست ازدسته خط-



شکل ۵۹. برای تمرین ۲

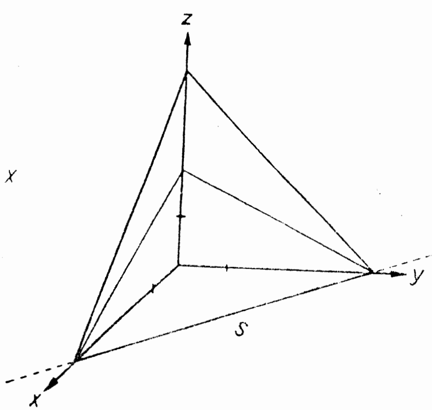


شکل ۶۰. برای تمرین ۳

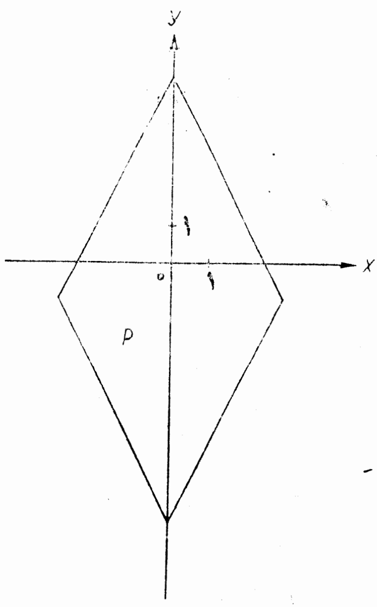
های خارج شده از مبداء.

۵. الف) $S=\{(x,y,z)\,|\,z=0 \wedge x+y=4\}$.

ب) شکل ۶۱ را ببینید.



شکل ۶۱. برای تمرین ۵



شکل ۶۲. مجموعهٔ نقطه‌های یک لوزی

۶. لوزی شکل ۶۲.

§۳۱. ۱. نه. اگر n یک عـدد درست باشد، $n+۱$ نیز یک عدد درست است. اگر m بزرگترین عضو مجموعهٔ عددهـای درست باشد، با توجه به‌اینکه $m+۱$ هم یک عدد درست است، تناقض پیش می‌آید.

۲. مجموع همهٔ عددهای طبیعی یک‌ادراك متناقض است. اگربخواهیم همهٔ عددهای درست را جمع کنیم، باید برای N یک عضوآخر وجود داشته باشد ومی‌دانیم که‌این، ممکن‌نیست.

۳. نه. زیرا اگر Eچنین‌مجموعه‌ای باشد$\mathscr{P}(E)$ از$\operatorname{card}E$ card اکیداً بزرگتر می‌شود.

۴. نه. پارادوکس ریشارد § ۲.۳۱ را ببینید.

۵. اگرN مجموعهٔ داده‌شده در§۱۶.۳۱ باشد، دراین‌صورت$N\notin N$ و این‌هم بنابه‌تعریفN به$N\in N$ منجر می‌شود. این پارادوکس، که درآن، دو ادعای از پیش درست، یکدیگر را نقض می‌کنند، مانع تشکیل مجموعهٔ N است.

§۳۲. ۱. اگر α، β وγ سه‌زاویهٔ یک مثلث باشند، داریم:

$$\alpha+\beta+\gamma=۱۸۰^\circ\Rightarrow\beta+\gamma=۱۸۰^\circ-\alpha$$

ازآنجا:

$$\alpha+\alpha'=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha'=۱۸۰^\circ-\alpha$$

$$\beta+\gamma=۱۸۰^\circ-\alpha\wedge\alpha'=۱۸۰^\circ-\alpha\Rightarrow\alpha'=\beta+\gamma$$

۲. الف) بله. ب) بله. رسم چنین دایره‌ای همیشه ممکن است.

۳. مسأله را اولـر حل کـرده است: $S=\varnothing$. ارنست ادوارد کومر (Ernest Eduard Kummer) (۱۸۱۰-۱۸۹۳)، ثابت‌کرد که به‌ازای هرn، وقتی‌که $n<۱۰۰$ باشد، $S=\varnothing$.

۴. فرض می‌کنیم که $(۲n+۱)^۳$ یک‌عدد زوج باشد، در این‌صورت یک‌عدد درست m وجود دارد به‌قسمتی‌که داشته باشیم:

$$(۲n+۱)^۳=۲m \text{ یا } ۸n^۳+۱۲n^۲+۶n+۱=۲m$$

و ازآنجا
$$۲(۴n^۳+۶n^۲+۳n)=۲m+۱$$

تناقض دراینجاست که در طرف اول این رابطه، یک‌عدد زوج ودر طرف دوم آن یک‌عدد فرد وجود دارد.

۵. فرض‌کنیم که $x=\frac{m}{n}$ یک‌عضو از مجموعهٔ S، گویا ولی‌نادرست باشد یعنی m و n نسبت به‌هم اول، $n\neq ۱$ و $n\neq ۰$ باشد. در این‌صورت، خواهیم داشت:

$$\frac{m^۲}{n^۲}+a\frac{m}{n}+b=۰\Rightarrow\frac{m^۲}{n}=-bn-am$$

تناقض درآنجاست که درطرف اول رابطه، یک‌کسر تحویل‌ناپذیر و درطرف دوم‌آن یک‌عدد درست قراردارد.

انتشارات

پویش

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب، خیابان فخررازی کوچه انوری پلاک ۱۱